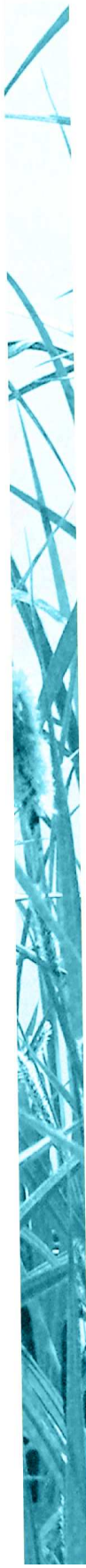


Partenariat 2011 – *Domaine Hydro-morphologie et altérations
physiques des hydrosystèmes continentaux – Action Prédétermination des étiages.*



Combinaison multi-modèle et cartographie de consensus du débit de référence d'étiage et du débit moyen à l'échelle de la France

*Marine Riffard, Vazken Andréassian, Pierre Nicolle et
Julien Peschard*

**Cemagref/Irstea, UR HBAN, Antony*

Avril 2012

Contexte de programmation et de réalisation

Les situations d'étiages, et plus généralement de sécheresses et de raretés d'eau, font l'objet d'attentions croissantes, sous l'effet conjugué des politiques publiques et d'événements répétés de manques d'eau. Il s'agit en particulier, dans les cadres conjoints de la DCE et du Grenelle de l'Environnement, de pouvoir déterminer des débits d'objectif d'étiages.

Les indicateurs hydrologiques tels que le module et le débit mensuel quinquennal sec (QMNA5) donnent des informations sur la ressource utiles pour la gestion (état des Lieux, typologie, gestion quantitative globale, autorisation de rejets de stations d'épuration, ...). La sous-action 4.1 constitue la deuxième étape vers la production d'un atlas national de référence, qui fera la synthèse des méthodes disponibles (modèles et approches de régionalisation).

Le rapport proposé ici est la contribution à la sous-action 4.1 de l'équipe Hydrologie de l'Unité de Recherche Hydrosystèmes et Bioprocédé du Cemagref/Irstea d'Antony pour ce qui concerne la mise en œuvre d'une combinaison multi-modèles et la production d'une cartographie de consensus.

Les auteurs

Marine Riffard
Ingénieur d'études
marine.riffard@Cemagref.fr
Cemagref/Irstea Antony

Julien Peschard
Assistant Ingénieur
julien.peschard@Cemagref.fr
Cemagref/Irstea Antony

Vazken Andréassian
Ingénieur en Chef des Ponts, des Eaux et
Forêts
vazken.andreassian@Cemagref.fr
Cemagref/Irstea Antony

Pierre Nicolle
Ingénieur d'études
pierre.nicolle@Cemagref.fr
Cemagref/Irstea Antony

Les correspondants

Onema : Pascal Maugis, DAST, pascal.maugis@onema.fr

Cemagref/Irstea : Eric Sauquet, Cemagref/Irstea, eric.sauquet@Cemagref/Irstea.fr

Droits d'usage :	<i>accès libre</i>
Couverture géographique :	<i>France hexagonale</i>
Niveau géographique :	<i>National</i>
Niveau de lecture :	<i>Professionnels, experts</i>
Nature de la ressource :	<i>Document</i>

Combinaison multi-modèle et cartographie de consensus du débit de référence d'étiage et du débit moyen à l'échelle de la France

Marine Riffard, Vazken Andréassian, Pierre Nicolle et Julien Peschard

RESUME	4
ABSTRACT	4
INTRODUCTION	5
1. CHOIX DE LA VARIABLE D'INTERET ET STRATIFICATION DE L'ECHANTILLON	5
1.1 Choix de l'unité d'expression de la grandeur à estimer	5
1.1.1 Cas du Module (Qa).....	9
1.2 Normalisation des erreurs des modèles.....	Erreur ! Signet non défini.
2. INTERCOMPARAISON DES MODELES	18
2.1 Qmna5.....	18
2.2 Modules.....	20
3. LA COMBINAISON MULTI-MODELES POUR LA CARTOGRAPHIE DE CONSENSUS	22
3.1 Principe de la combinaison bayésienne multi-modèle	22
3.1.1 Les hypothèses de départ.....	22
3.1.2 Les étapes de la combinaison bayésienne.....	23
3.1.3 Efficacité de la prise en compte de chaque modèle.....	31
3.2 Résultats du multi-modèle sur l'échantillon de référence stratifié	31
3.2.1 Multi-modèle de Q_{MNA5}	32
3.2.2 Multi-modèle de Module.....	33
3.2.3 Quantification de l'incertitude	34
4. CARTOGRAPHIES DE CONSENSUS.....	34
4.1 Les Q_{mna5} en l/s.....	35
4.2 Les Q_a en l/s	36

Combinaison multi-modèle et cartographie de consensus du débit de référence d'étiage et du débit moyen à l'échelle de la France

Marine Riffard, Vazken Andréassian, Pierre Nicolle et Julien Peschard

Résumé

Pour cette ultime partie du travail réalisé dans le cadre de la convention Onema-Cemagref/Irstea, visant à caractériser les débits d'étiages et les débits moyens sur l'ensemble du réseau hydrographique de l'hexagone, il restait à réaliser une inter-comparaison des différentes méthodes développées et adaptées au contexte de l'étude, et à proposer une méthodologie permettant de proposer une cartographie consensuelle de nos variables d'intérêt, le module et le QMNA5.

Ce rapport expose les différentes étapes qui nous ont amenées à mettre en œuvre la méthode bayésienne nous permettant de réaliser la combinaison multi-modèle et la cartographie de consensus, et les résultats obtenus avec cette méthode.

Pour les deux variables d'intérêt, une carte consensuelle est fournie, sur le réseau hydrographique national. Une large proportion du réseau est couverte (plus de 99%) et les tronçons non renseignés concernent essentiellement des petits bassins amont pour lesquels le réseau de drainage s'est révélé ne pas couler.

La combinaison multi-modèle permet d'améliorer sensiblement les estimations des trois modèles initiaux de QMNA5 et maintient la qualité des meilleures estimations initiales pour le module.

Le multi-modèle est appliqué finalement sur un échantillon non stratifié, pour garantir la continuité des estimations et éviter les effets de sauts des débits lors du changement de classe (de surface).

Abstract

For the last part of the work about the realisation of a national map of characteristics flows, we made a comparison with the three predetermination models. It was eventually decided to use all models in a bayesian combination accounting for their respective efficiencies. We present here the methodology used and the results (the national maps) that we obtained.

For both variables of interest, a consensual map is supplied, on the national river system. A wide proportion of the network is covered (more than 99 %) and the not informed sections concern essentially small upstream catchments for which the hydrological network is not correctly informed. The multi-model combination allows to improve the estimations of the three initial models of QMNA5 and maintains quality of the best initial estimations for the module (in global condition). The multi-model is applied to a non-stratified sample to maintain continuity in estimations.

Combinaison multi-modèle et cartographie de consensus du débit de référence d'étiage et du débit moyen à l'échelle de la France

Marine Riffard, Vazken Andréassian, Pierre Nicolle et Julien Peschard

Introduction

Pour cette ultime partie du travail réalisé dans le cadre de la convention Onema-Cemagref/Irstea, visant à caractériser les débits d'étiages et les débits moyens sur l'ensemble du réseau hydrographique de l'hexagone, il restait à réaliser une inter-comparaison des différentes méthodes développées et adaptées au contexte de l'étude, et à proposer une méthodologie permettant de proposer une cartographie consensuelle de nos variables d'intérêt, le module et le QMNA5.

Pour la lecture, il est nécessaire de garder en tête les notations appliquées aux différentes variables :

- ❖ W : les observations aux stations de l'échantillon de référence;
- ❖ Y1 : Estimations d'Aix, modèle Pluie-débit;
- ❖ Y2 : Estimations d'Antony, modèle IDW;
- ❖ Y3 : Estimations de Lyon, modèle CART.

1. Choix de la variable d'intérêt et stratification de l'échantillon

Il était important de mener une réflexion sur les transformations à appliquer ou non aux deux variables d'intérêt (module et Qmna5), dans la mesure où celles-ci vont affecter un poids plus ou moins importants à certaines erreurs des modèles selon la transformation qu'elles subiront, et également pour que les hypothèses nécessaires à l'application de notre méthodologie multi-modèle (en l'occurrence, la mise en œuvre d'une combinaison multi-modèle bayésienne) ne soient pas complètement aberrantes.

1.1 Choix de la transformation

Pour effectuer notre combinaison multi-modèle bayésienne, l'hypothèse majeure que nous aurons à faire est une hypothèse de normalité. Dans la mesure où certaines transformations des variables peuvent amener à rendre les distributions des variables plus normales nous avons testé 6 possibilités de transformation des variables.

Nous nous sommes ainsi appuyés sur deux outils statistiques, l'un visuel -les graphiques quantiles-quantiles à la fois des observations et des trois estimations dont nous disposons, qui donnent une première information sur la normalité (au sens statistique) ou non de la distribution de l'échantillon considéré -, l'autre formel – le résultat de tests statistiques de normalité appliqués à nos différents échantillons.

Pour chaque échantillon, nous testons donc 6 possibilités d'expression de la variable : le débit cible en m³/s ou en mm, puis la transformation de ces deux variables tour à tour par le log et par la racine.

Les QQplot (ou graphiques Quantile-Quantile) montrent visuellement l'adéquation de la distribution d'une variable avec une loi normale de même paramètres (moyenne et écart type).

1.1.1 CAS DU QMNA5

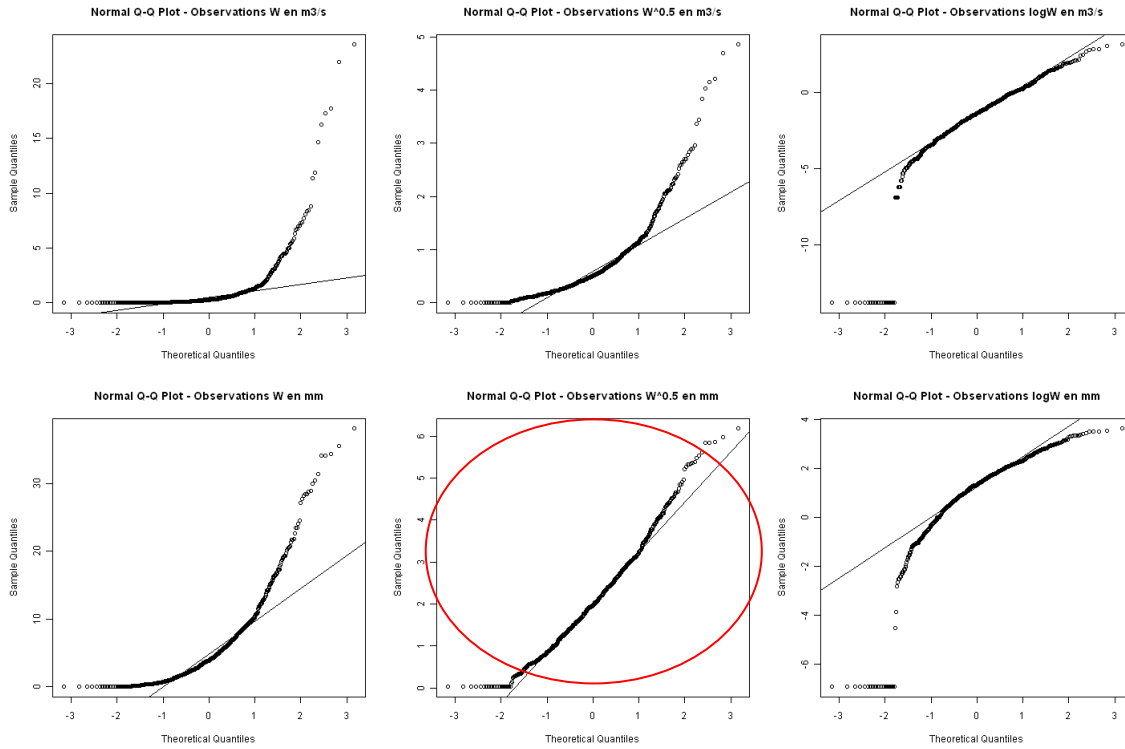


Figure 1 : QMNA5 observé - QQplot après différentes transformations

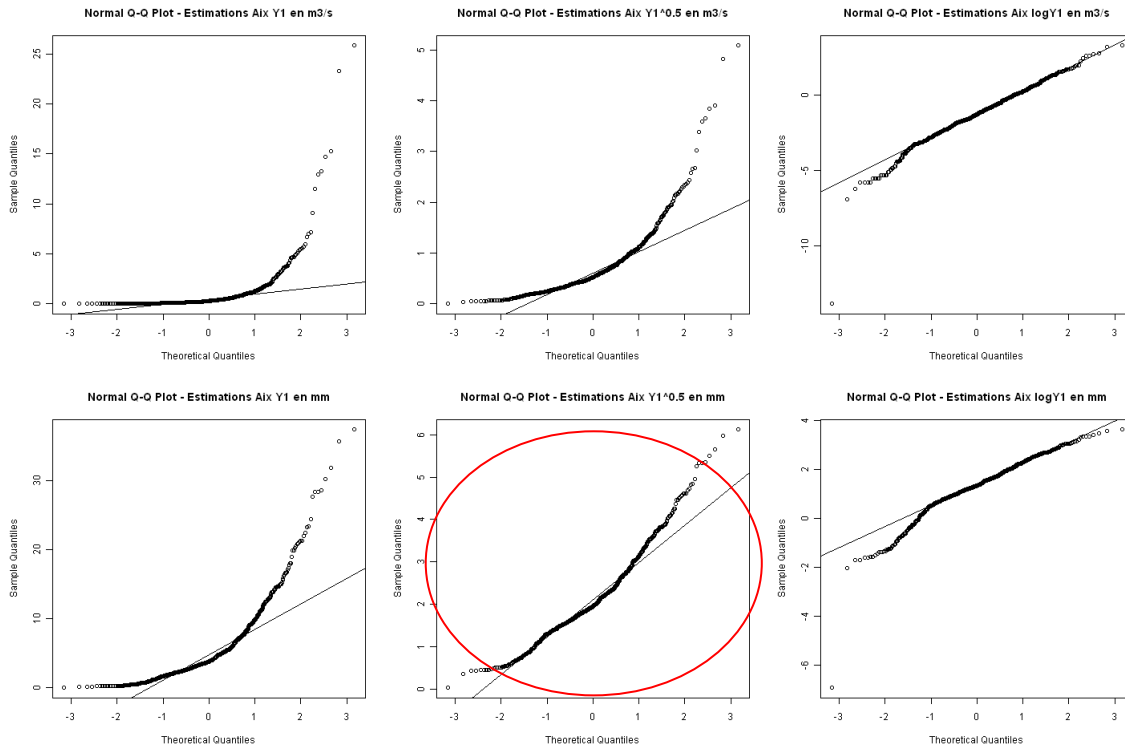


Figure 2 : QMNA5 Estimations issues du modèle pluie-débit - QQplot après différentes transformations

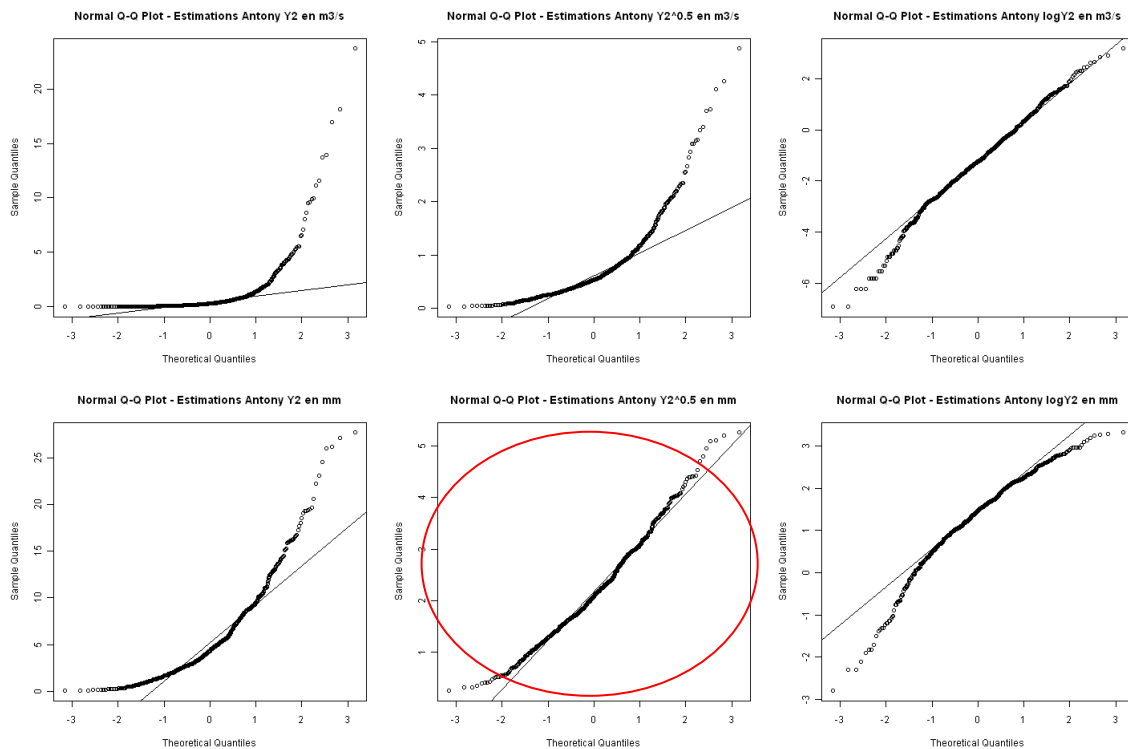


Figure 3 : QMNA5 Estimations du modèle IDW- QQplot après différentes transformations

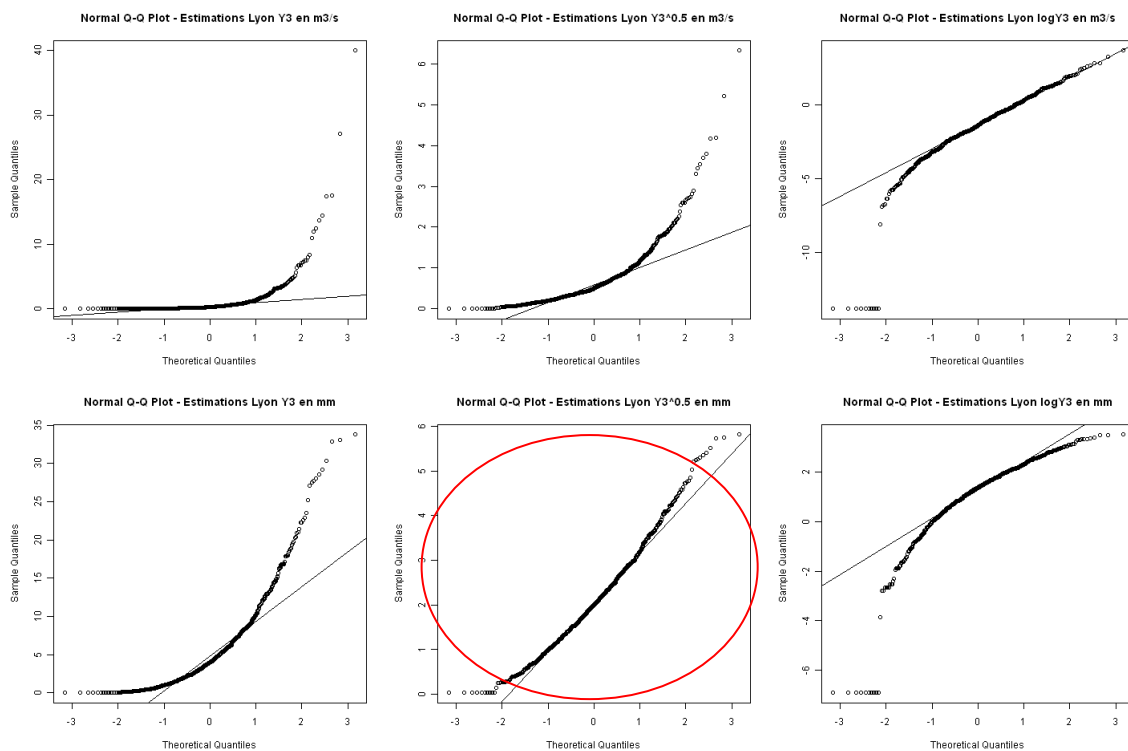


Figure 4 : QMNA5 Estimations du modèle CART- QQplot après différentes transformations

Au vu des différents graphiques quantiles-quantiles, on constate que la transformation par la racine d'une variable exprimée en mm rend la distribution de celle-ci normale, au moins pour la partie centrale de la distribution.

La transformation par le Log d'une variable exprimée en m³/s peut également convenir. Notre préférence va cependant à la variable exprimée en mm car nous allons utiliser les productions en lame d'eau sur un maillage fin (100*100m) de chaque modèle, afin de garantir la continuité dans les écoulements le long du linéaire de cours d'eau. En effet, en cumulant ainsi les productions au fur et à mesure que les surfaces se cumulent, on s'assure que la variable augmente à chaque fois que la surface augmente.

Sur les queues de distribution, la normalité n'est cependant pas atteinte. Cette observation est confirmée par les résultats des différents tests statistiques d'adéquation à la loi normale réalisés dans un second temps (cf. Tableau 2). Nous effectuons deux types de tests de normalité, pour s'assurer de la fiabilité de notre hypothèse :

- ❖ un test de Shapiro-Wilks, qui s'assure de la symétrie et de l'aplatissement de la distribution de la variable considérée;
- ❖ un test de Kolmogorov-Smirnov qui s'intéresse lui plus à la partie centrale de la distribution; ce test peut s'appliquer tel quel ici, car le nombre d'observations dont nous disposons sur nos échantillons est suffisamment élevé pour considérer que les moyenne et variance de la distribution sont connues.

Tableau 1: p-value des deux tests de normalité (Shapiro-Wilks et Kolmogorov-Smirnov) pour les QMNA5

Q en mm/mois	Shapiro Observatio	Kolmogorov- Smirnof	Shapiro Aix	Kolmogorov- Smirnof	Shapiro Antony	Kolmogorov- Smirnof	Shapiro Lyon	Kolmogorov- Smirnof
Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Log Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Racine Q	0.000	0.089	0.000	0.002	0.000	0.182	0.000	0.354

Comme on pouvait s'y attendre, le test de Shapiro ne permet pas de conclure à la normalité des distributions (on rejette l'hypothèse). En revanche le test de Kolmogorov-Smirnov ne rejette pas l'hypothèse de normalité pour au moins deux des échantillons (modèle CART et modèle IDW) et pour les observations, dans le cas d'une transformation par la racine des variables exprimées en mm/mois (avec un risque de 5%). Dans la mesure où les graphiques quantiles-quantiles associés à cette transformation sont corrects, notre hypothèse de normalité paraît tout à fait acceptable.

Nous utiliserons donc comme variable pour le multi-modèle, les QMNA5 exprimés en mm et transformés par la racine.

Il faut cependant bien garder à l'esprit que l'hypothèse de normalité sur les distributions des différentes variables que nous faisons pour la mise en œuvre du multi-modèle bayésien, si elle est une hypothèse forte, reste une hypothèse de première approximation. La combinaison bayésienne est un modèle que l'on pourrait qualifier de type "boîte noire". Il n'a pas vocation à représenter de manière exacte les phénomènes ou les distributions des variables que nous nous attachons à simuler ou prédéterminer. Au final, c'est la qualité de la simulation qui sera importante.

1.1.2 CAS DU MODULE (QA)

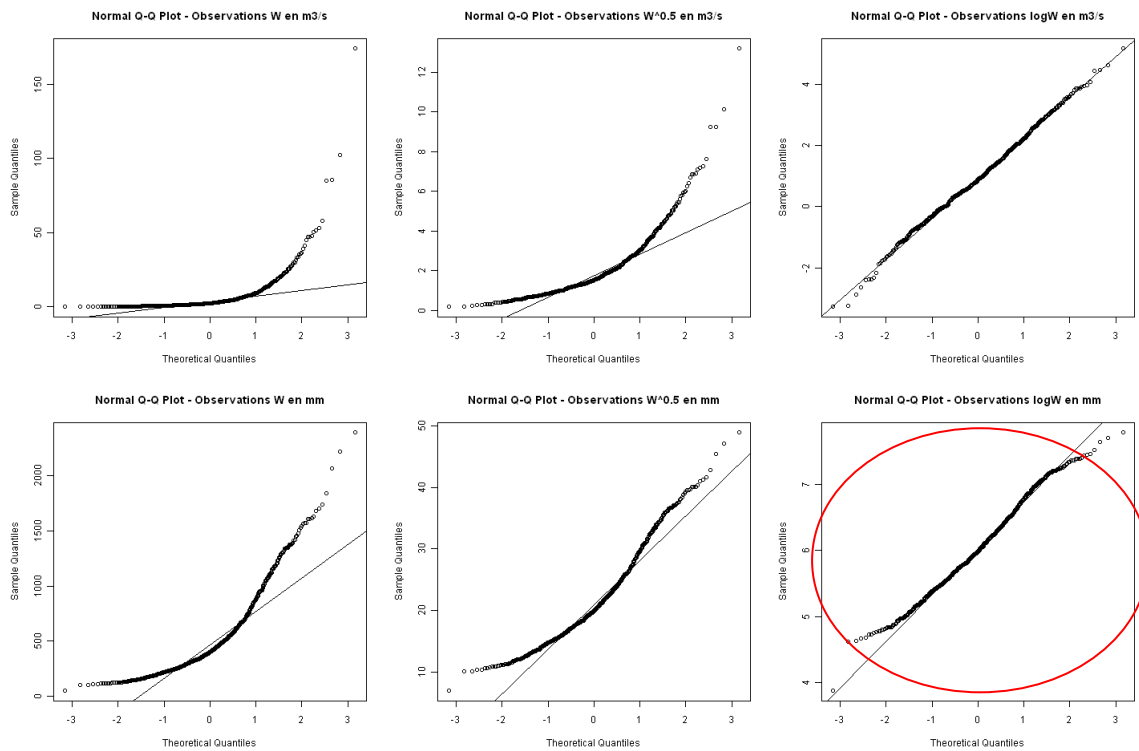


Figure 5 : QA observé - QQplot après différentes transformations

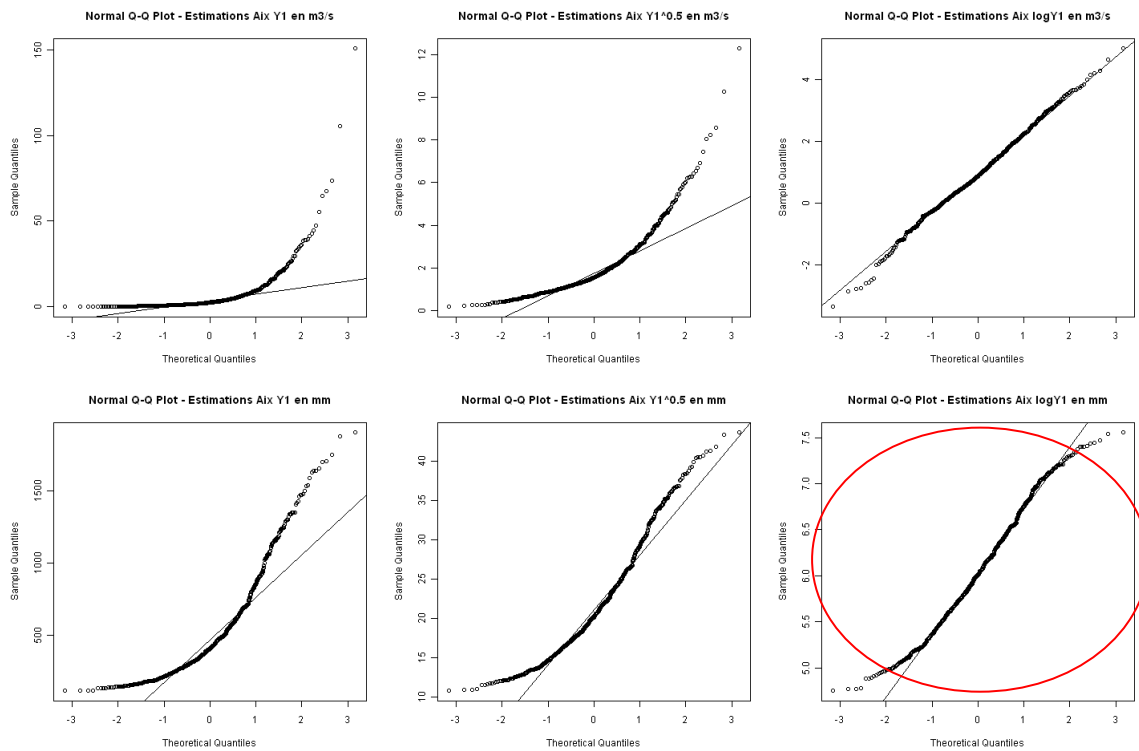


Figure 6 : QA Estimations du modèle pluie-débit - QQplot après différentes transformations de la variable

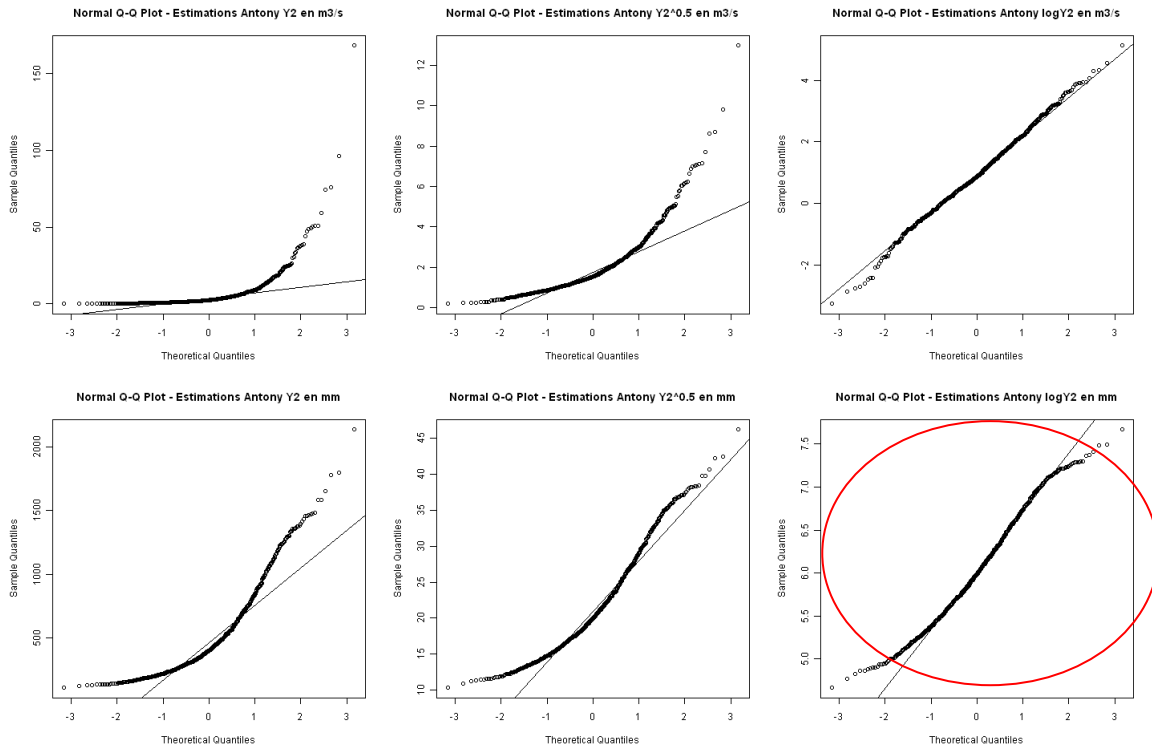


Figure 7 : QA Estimations du modèle IDW - QQplot après différentes transformations

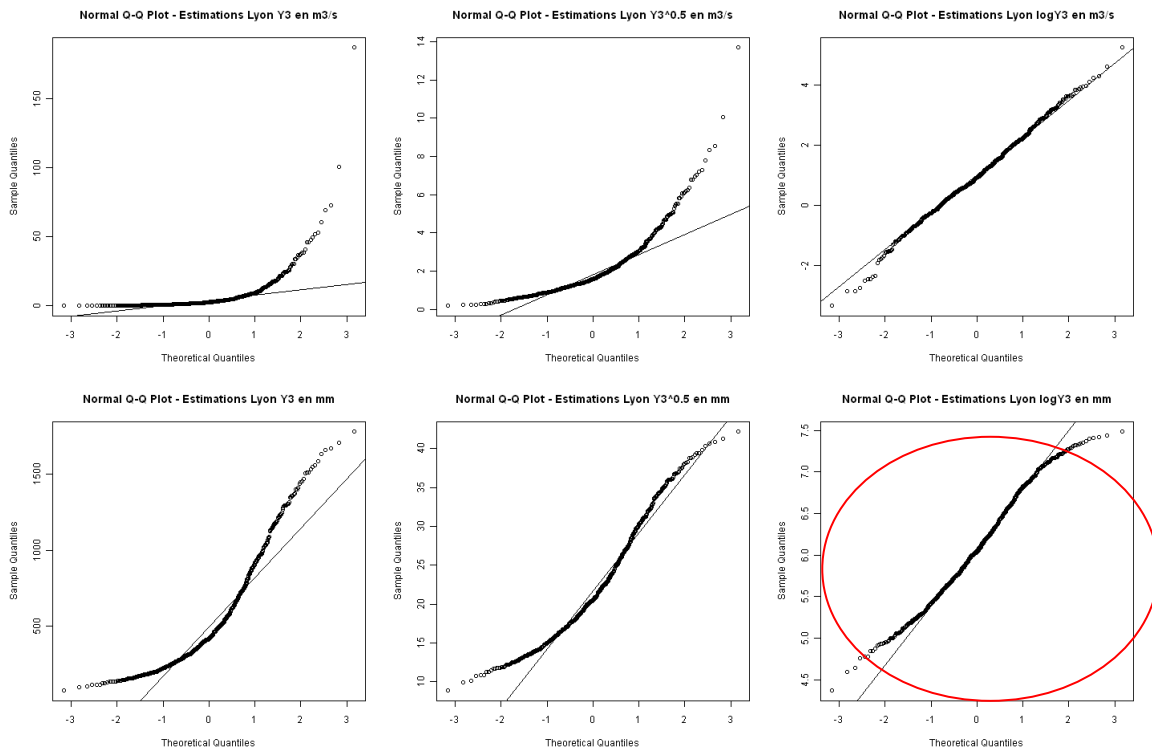


Figure 8 : QA Estimation du modèle CART - QQplot après différentes transformations

Au vu des différents graphiques quantiles-quantiles, on s'aperçoit que la transformation par le log de notre variable exprimée en m3/s rend la distribution de celle-ci normale. Cependant, et pour la même raison que dans le cas du QMNA5, nous souhaitons travailler sur des productions par maille de 100*100m de chaque modèle, que nous allons ensuite

cumuler le long du plan de drainage dans l'objectif de garantir la continuité des écoulements. Pour cette raison, nous choisissons plutôt d'utiliser des variables exprimées en mm, et transformées par les Log.

Notre choix est validé par les résultats des différents tests statistiques de normalité réalisés dans un second temps (cf. Tableau 2).

Comme pour le QMNA5, nous effectuons deux types de tests de normalité, pour nous assurer de la pertinence de notre hypothèse.

Tableau 2 : p-value des deux tests de normalité (Shapiro-Wilks et Kolmogorov-Smirnof) pour le QA

Q en mm/an	Shapiro Observatio ns	Kolmogorov- Smirnof Observatio ns	Shapiro Aix	Kolmogorov- Smirnof Aix	Shapiro Antony	Kolmogorov- Smirnof Antony	Shapiro Lyon	Kolmogorov- Smirnof Lyon
Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Log Q	0.001	0.350	0.000	0.165	0.000	0.218	0.000	0.000
Racine Q	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001

Nos premières conclusions faites à partir des graphiques quantiles-quantiles sont bien confirmés par le test de Kolmogorov/Smirnof. En effet, l'hypothèse selon laquelle la distribution de l'échantillon considéré est normale est rejetée pour des p-value < 0.05 (avec un risque de 5%) pour les deux tests. Pour le test du KS, on valide l'hypothèse pour les observations, les estimations du modèle pluie-débit et celles du modèles IDW.

Pour la suite des travaux sur le module et notamment pour effectuer le multi-modèle, nous utiliserons donc dorénavant le log des débits en mm/an.

1.2 Stratification de l'échantillon

Nous nous sommes ensuite penchés sur la pertinence de stratifier nos échantillons. En effet, il est fréquent que les modèles ne soient pas toujours aussi performant selon les différents types de bassins versants et comportements hydrologiques qu'ils simulent.

Une stratification selon la surface nous paraît pertinente, au vu de l'échantillon de bassin jaugés qui a permis le calage des modèles (en effet, nous disposons de peu de stations sur des très petits bassins ou des très grands, alors que les stations jaugées sont nombreuses sur les bassins de taille moyenne -entre 100 et 1000 km²).

1.2.1 CAS DU QMNA5

La Figure 9 présente les biais des différents modèles en fonction de la surface du bassin versant.

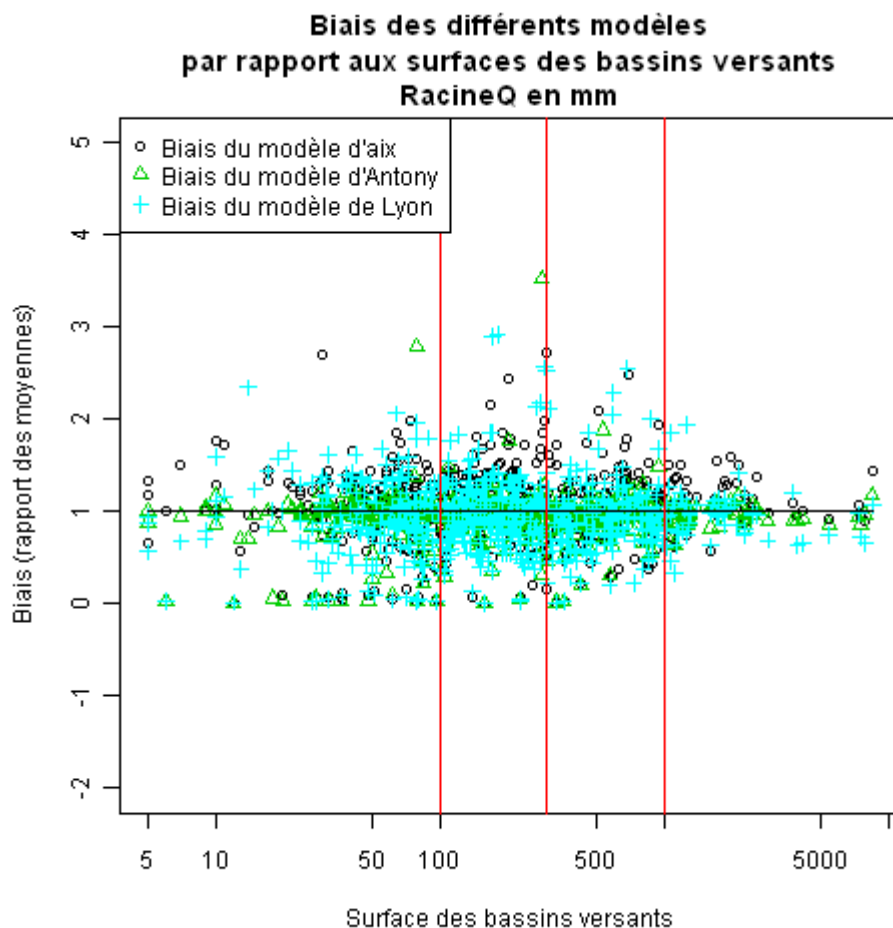


Figure 9 : Biais des différents modèles de QMNA5 (RacineQ en mm/mois)

De visu, on pourrait être tenté de découper notre échantillon en 4 classes de surface : 0-100 km², 100-300 km², 300-1000 km² et 1000-10000 km². Sur ces différentes classes de surface, les biais semblent se comporter de façons différentes et dépendre de la surface.

L'erreur apparaît ainsi plus forte sur les bassins de tailles moyennes, alors que sur les petits bassins et les grands bassins, elle semble faible et constante.

Pour confirmer ou infirmer cette première intuition, nous avons utilisé à nouveau deux outils statistiques : l'un visuel toujours –l'observation des boxplot des biais sur les cinq classes imaginées (cf. Figure 10) -, le second plus formel –la mise en œuvre d'un test de comparaison de Kolmogorov-Smirnof (cf. Tableau 3).

Ce test de comparaison de deux populations est non paramétrique (pas d'hypothèse sur la distribution des variables), puisque l'on compare les biais des modèles, dont on ne connaît pas les distributions. Il vise simplement à détecter toute forme de différenciation entre les distributions de deux échantillons.

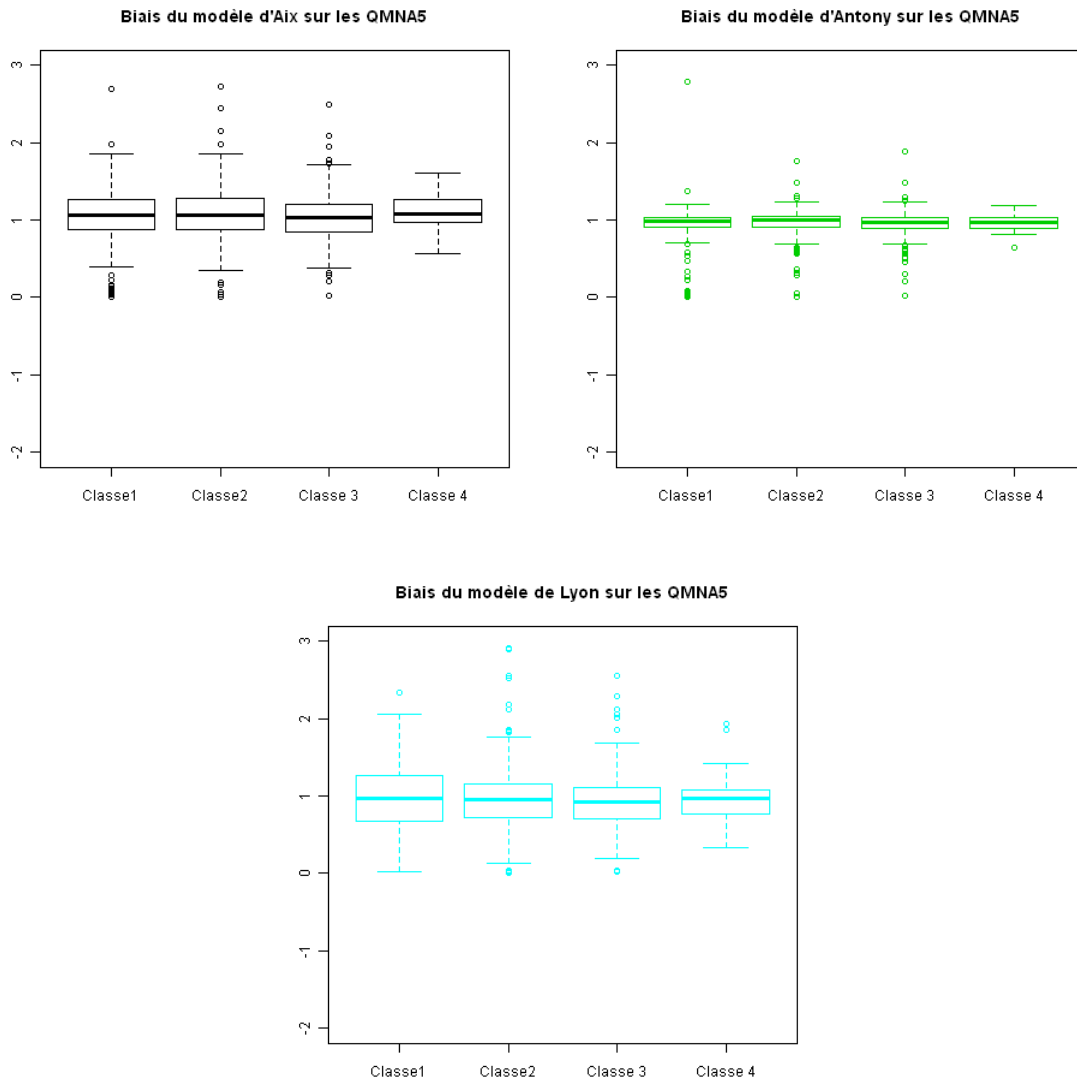


Figure 10 : Boxplot des biais des trois modèles de QMNA5 sur les différentes classes de surface

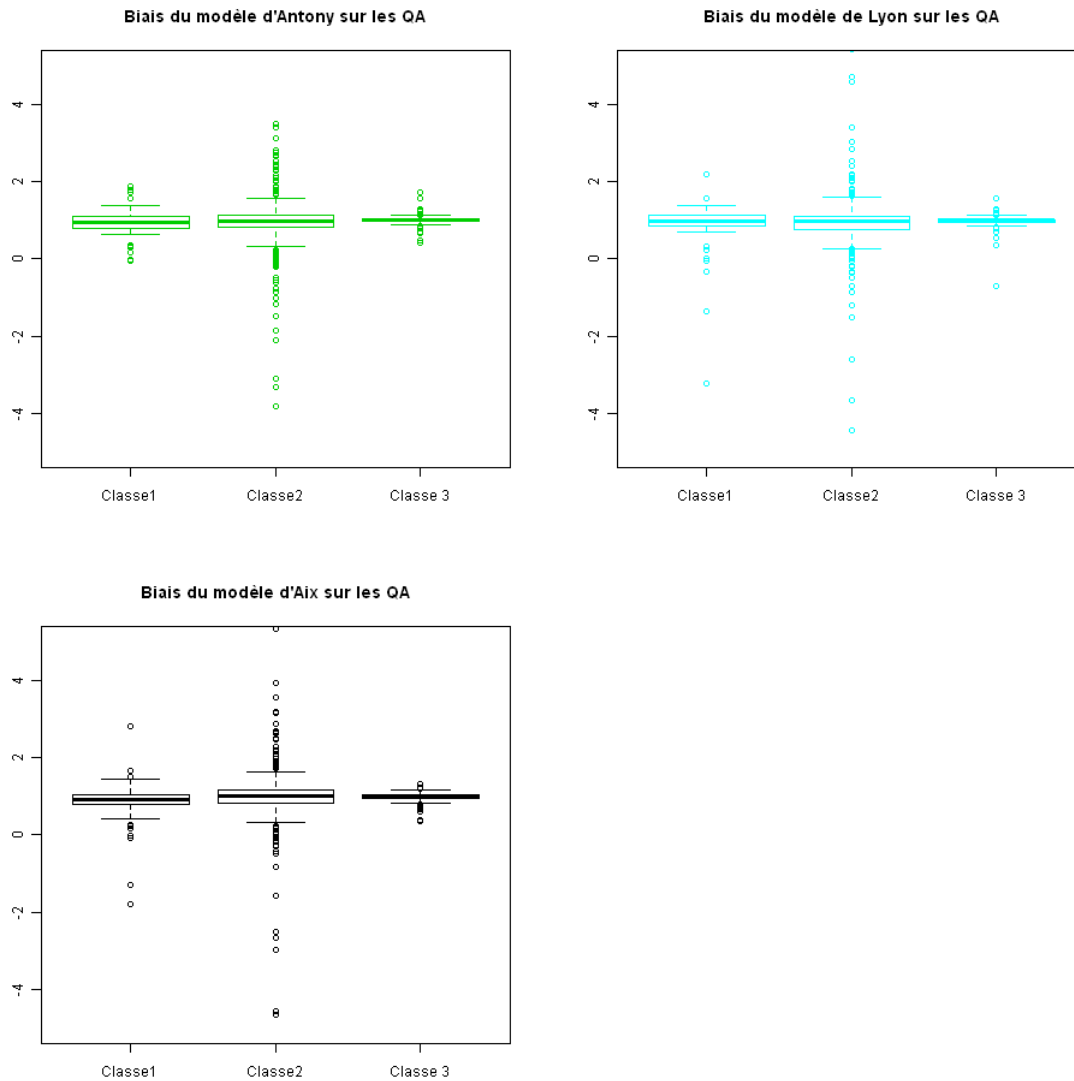


Figure 12 : Boxplot des biais des trois modèles de QA sur les différentes classes de surface

La figure 10 nous montre d'une façon plus visuelle l'évolution des biais des modèles selon la classe de surface.

Figure 12 : Boxplot des biais des trois modèles de QA sur les différentes classes de surface

A première vue, la figure 10 ne montre pas des moyennes très différentes pour les biais entre les différentes classes de surface.
 En revanche, on observe de nombreuses valeurs atypiques sur les différentes classes, qui rendent ce paramètre peu fiable.

Tableau 3 : p-values des tests de comparaison de populations de Kolmogorov-Smirnov pour les biais sur le QMNA5

Racine Q en mm/mois	Test de Mann-Whitney cl1-cl2	Test de Mann-Whitney cl2-cl3	Test de Mann-Whitney cl3-cl4	Test Kolmogorov-Smirnov cl1-cl2	Test Kolmogorov-Smirnov cl2-cl3	Test Kolmogorov-Smirnov cl3-cl4
Aix	0.59	0.13	0.12	0.47	0.60	0.02
Antony	0.95	0.12	0.55	0.52	0.13	0.68
Lyon	0.26	0.28	0.66	0.21	0.49	0.34

Les tests invalident l'option de stratifier l'échantillon pour la variable QMNA5 exprimée en mm/mois et transformée par la racine. En effet, l'hypothèse selon laquelle les deux populations suivent une même distribution est rejetée pour une $p\text{-value} < 0.05$ (avec un risque de 5% de rejeter l'hypothèse alors qu'elle était plausible).

Nous ne découperons donc pas notre échantillon.

1.2.2 CAS DU MODULE

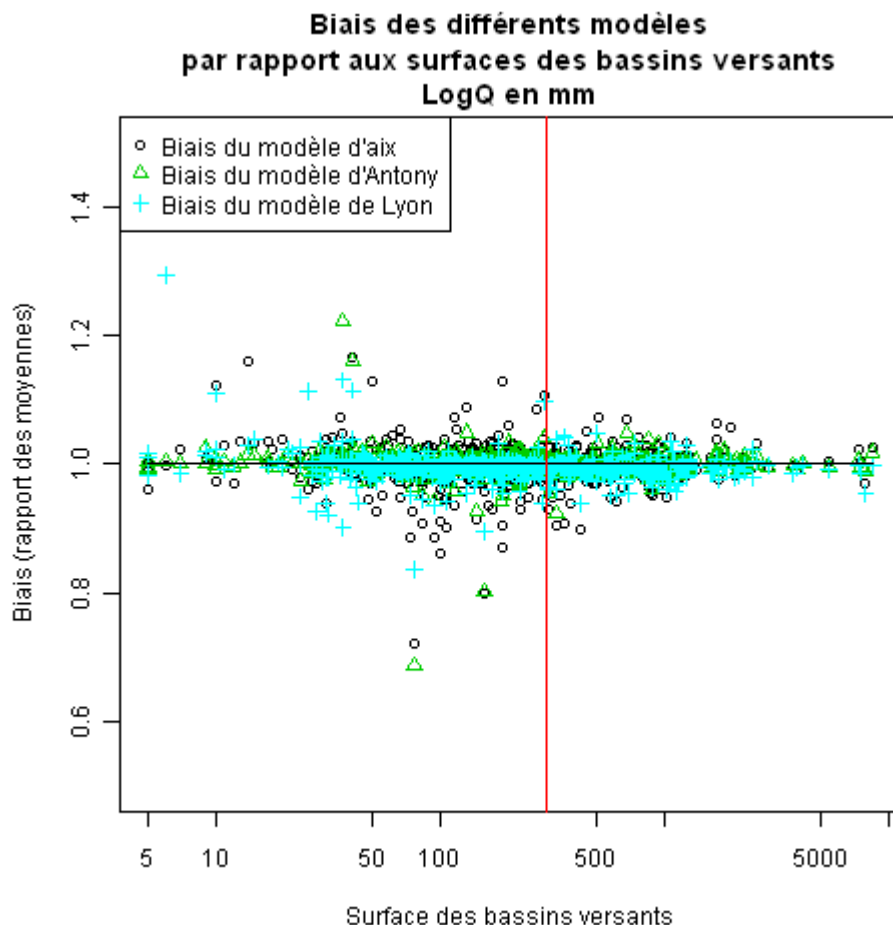


Figure 11 : Biais des différents modèles de QA (log Q en mm/an)

De visu, on est tenté de découper notre échantillon en 2 classes de surface : 0-300 km² et 300-10000 km². Sur ces différentes classes de surface, les biais semblent se comporter de façons différentes et dépendre de la surface.

Comme dans le cas précédent, l'erreur apparait ainsi plus forte sur les bassins de tailles moyennes, alors que sur les petits bassins et les grands bassins, elle semble faible et constante.

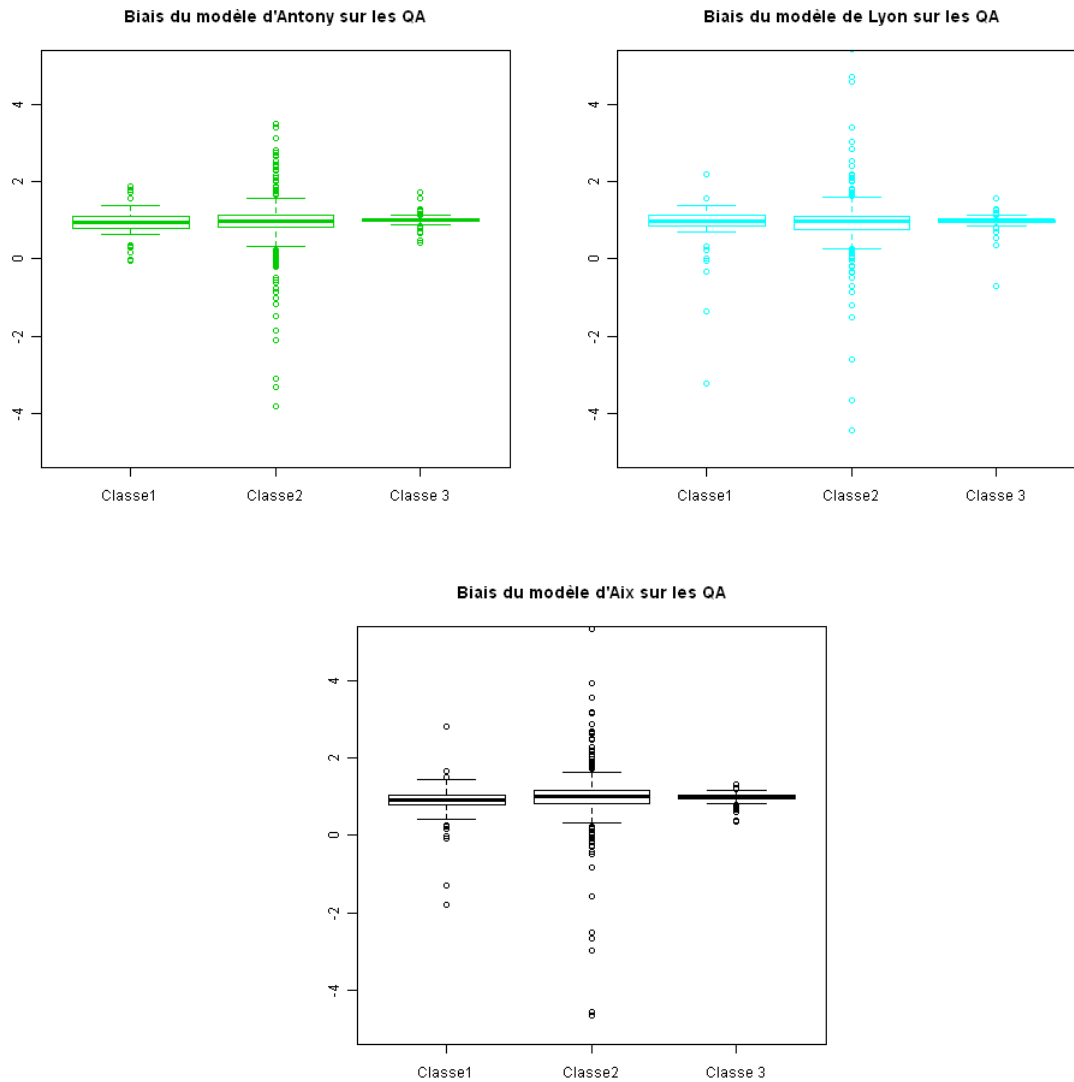


Figure 12 : Boxplot des biais des trois modèles de QA sur les différentes classes de surface

Comme pour le QMNA5, la Figure 12 ne montre pas des moyennes très différentes pour les biais entre les différentes classes de surface et de nouveau, on observe de nombreuses valeurs atypiques sur les différentes classes, qui rendent ce paramètre peu fiable.

Le test de Kolmogorov-Smirnov va nous permettre de valider ou non notre stratification initiale.

Tableau 4 : p-values des tests de comparaison de populations de Kolmogorov-Smirnov pour les biais sur le QA

LogQ en mm/an	Test de Mann- Whitney cl1- cl2	Test Kolmogorov- Smirnov cl1- cl2
Aix	0.65	0.51
Antony	0.34	0.78
Lyon	0.06	0.15

Les tests invalident l'option de stratifier l'échantillon pour la variable QA exprimée en mm/an et transformée par le log. En effet, l'hypothèse selon laquelle les deux populations suivent une même distribution est rejetée pour une $p\text{-value} < 0.05$ (avec un risque de 5% de rejeter l'hypothèse alors qu'elle était plausible).

Nous ne découperons donc pas notre échantillon.

2. Intercomparaison des modèles

2.1 Qmna5

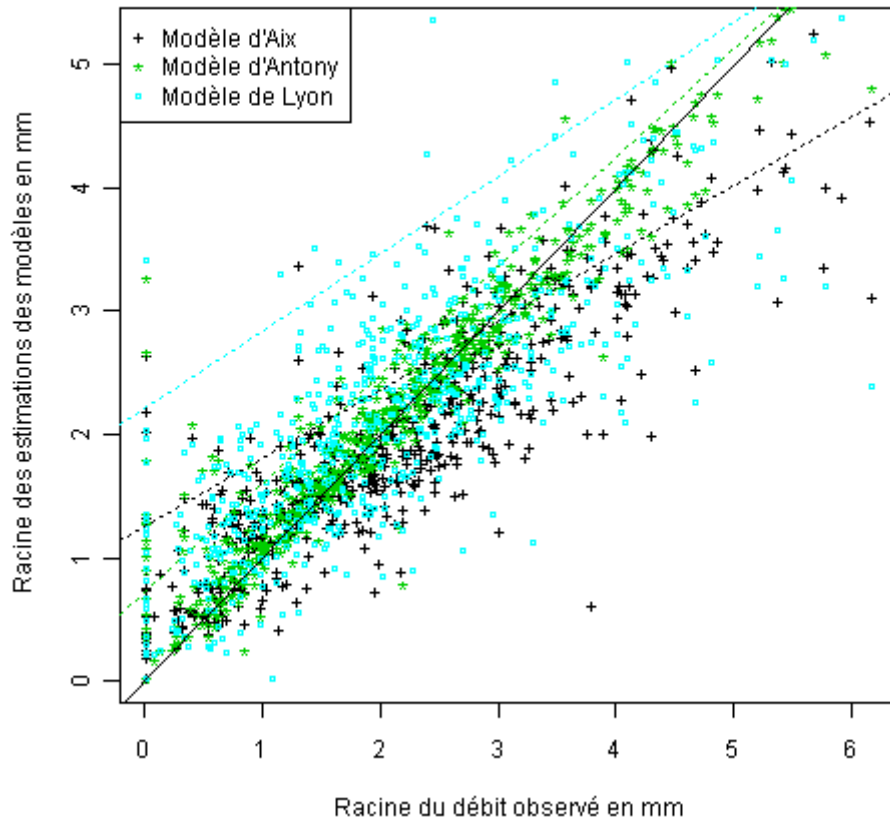


Figure 13 : Estimations des différents modèles vs observations (log QMNA5)

La Figure 13 et le Tableau 5 présentent les différentes estimations des trois modèles sur les 3 classes de surface définies précédemment et les différents critères de performance obtenus par les modèles.

Sur le graphique, on observe que le modèle IDW est moins dispersé autour de la médiane et mieux aligné. Les deux autres modèles montrent une dispersion élevée et des tendances similaires.

Tableau 5 : Critères de performance des modèles initiaux de QMNA5 sur l'échantillon complet

	Modèle	Critère
R ²	Aix	0.72
	Antony	0.94
	Lyon	0.53
RMSE	Aix	3.83
	Antony	1.65
	Lyon	4.43
NASH	Aix	0.64
	Antony	0.93
	Lyon	0.52

Les différents critères de performance (coefficient de détermination, RMSE et critère de Nash) présentés dans le Tableau 5 montrent que les modèles n'obtiennent pas des résultats équivalents sur l'échantillon global. Le modèle IDW montre une meilleure performance, quel que soit le critère regardé.

2.2 Modules

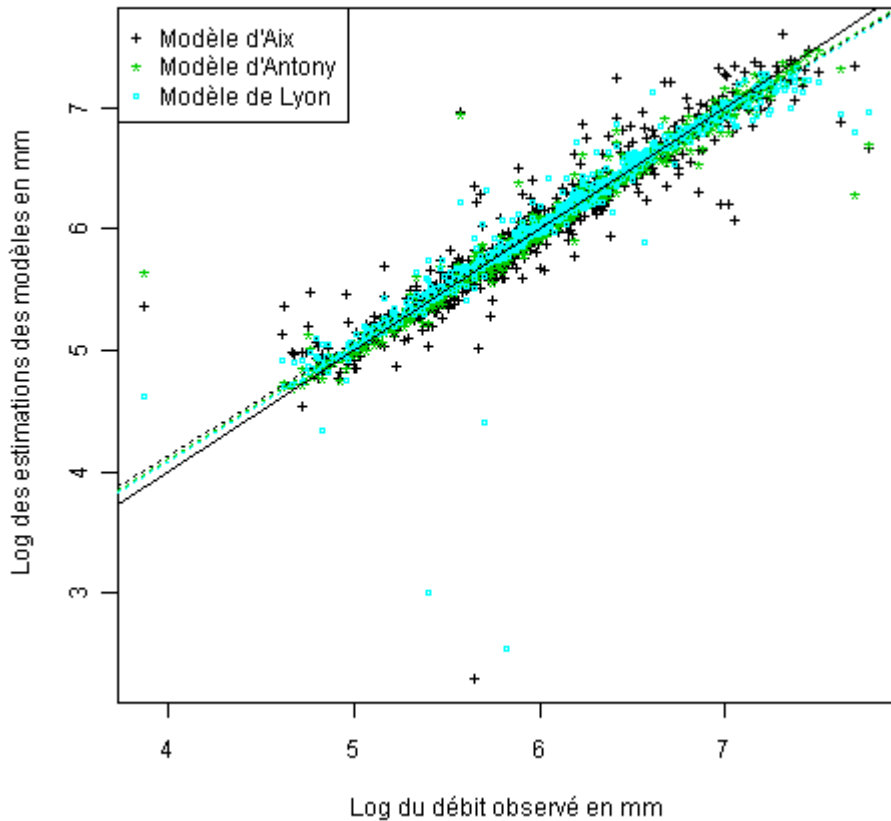


Figure 14 : Estimations des différents modèles vs observation (log QA)

La Figure 14 et le

Tableau 6 présentent les différentes estimations des trois modèles l'échantillon global et les différents critères de performance obtenus par les modèles.

Sur le graphique, on observe que tous les modèles paraissent aussi performant les uns que les autres et bien alignés sur la médiane.

Tableau 6 : Critères de performance des modèles initiaux de QA sur les différentes classes de surface

	Modèle	Critère
R ²	Aix	0.87
	Antony	0.96
	Lyon	0.41
RMSE	Aix	0.24
	Antony	0.14
	Lyon	0.76
NASH	Aix	0.87
	Antony	0.96
	Lyon	-0.31

Les critères du modèle de Lyon (CART) paraissent faibles, mais cela est dû à la présence de valeurs nulles qui tirent les performances vers le bas dans le cas où la variable est transformée par le Log.

Les critères sur la variable non transformée sont nettement meilleurs et équivalents entre les trois modèles.

En conclusion, le multi-modèle bayésien va nous permettre de laisser chaque modèle s'exprimer, au prorata de son efficacité sur la classe de surface sur lequel il sera appliqué.

Nous comparerons cependant les résultats obtenus avec une multi-modèle non stratifié, afin de s'assurer de la pertinence de la stratification, même si les tests statistiques nous montrent que celle-ci est légitime.

3. La combinaison multi-modèles pour la cartographie de consensus

Nous présentons le principe de la combinaison bayésienne en nous appuyant sur les résultats et les figures obtenus avec un échantillon non stratifié pour ne pas surcharger la démonstration.

Les résultats obtenus par la suite seront présentés sur l'échantillon divisé en classes de surface qui permet d'affiner nos estimations et de réduire les incertitudes qui leur sont associées et pour chacune des variables cibles.

3.1 Principe de la combinaison bayésienne multi-modèle

La statistique bayésienne est la statistique des probabilités conditionnelles. Ainsi, on exprime une variable d'intérêt particulière inconnue (ici un débit d'étiage ou un débit moyen) conditionnellement à d'autres variables que l'on connaît (dans notre cas des estimations issues de différents modèles de prédétermination) en utilisant le théorème de Bayes.

L'intérêt est d'ajuster la distribution de probabilités de la variable cible, au fur et à mesure que celle-ci est expliquée par différentes variables. A chaque nouvelle mise à jour du modèle (i.e chaque nouvelle prise en compte d'information), la précision associée à la nouvelle estimation de la variable cible est augmentée et sa distribution modifiée. La nouvelle distribution, appelée distribution *a posteriori*, devient ainsi la nouvelle distribution *a priori* pour la mise à jour suivante où une nouvelle variable explicative va être prise en compte.

3.1.1 LES HYPOTHESES DE DEPART

Pour mettre en œuvre ce multi-modèle bayésien, nous avons dû nous appuyer sur un certain nombre d'hypothèses :

- **Hypothèse 1 : Hypothèse de vecteur normal : On se situe dans le cadre de lois de probabilités de type normales : ainsi, le *prior* est un modèle normal et le *postérieur* est également un modèle normal (propriété de conjugaison associée aux lois normales);**

Cette hypothèse n'est pas aberrante dans la mesure où le modèle normal est bien adapté à la représentation des débits moyens. Pour les débits d'étiage comme le QMNA5, si le modèle normal n'est peut-être pas le plus adapté, il peut convenir toutefois comme hypothèse de première approximation. Par ailleurs, cette hypothèse permet un certain nombre d'hypothèses simplificatrices nécessaires à la mise en œuvre du modèle bayésien.

- **Hypothèse 2 : Les relations explicatives entre la variable cible et les variables explicatives sont linéaires : cette hypothèse découle directement de la première hypothèse de normalité;**
- **Hypothèse 3 : L'incertitude sur les coefficients des modèles conditionnels et leur variance est négligeable.**

Pour l'ordre de prise en compte des modèles, et cela pour chaque classe de surface considérée, nous prendrons successivement les modèles par ordre de performance croissante. Ainsi, si un modèle est plus performant qu'un autre, ses estimations ne seront prises en compte qu'une fois que le moins bon modèle aura été utilisé. Cela permet d'éviter que certains modèles ne soient écartés directement au profit des autres plus performants, la mise à jour bayésienne ne se faisant que si les nouvelles informations apportent un gain de performance. En permettant cela, nous considérons que l'apport d'un modèle ne se mesure

pas uniquement par le gain de performance qu'il apporte. Il peut également permettre l'introduction d'une simple tendance et décaler la moyenne de la distribution dans le bon sens. Pour les Q_{mna5} et le QA on prendra donc en premier les estimations de Lyon, puis d'Aix et enfin d'Antony, pour le multi-modèle sans stratification de l'échantillon..

3.1.2 LES ETAPES DE LA COMBINAISON BAYESIENNE

Les lois de distribution caractérisant nos variables cibles étant supposées normales (hypothèse 1), elles seront donc décrites au moyen des deux paramètres, la moyenne et la variance. Ce sont ces deux paramètres qui changeront au fur et à mesure des différentes prises en compte des nouvelles variables (ici, les estimations des différents modèles de prédétermination). Chaque modification de ces deux paramètres est appelée mise à jour du modèle bayésien.

La combinaison se fait donc en plusieurs étapes :

- **Définition d'un *prior* : ajustement d'un modèle probabiliste sensé représenter la distribution de probabilité de la variable d'intérêt. Ce modèle est ajusté sur la base de la connaissance *a priori* qu'on a de la variable cible ;**

Comme *prior* initial, nous choisirons une loi normale de moyenne m , la moyenne des débits "observés" (i.e. les débits de référence proposés par la banque HYDRO) sur l'échantillon de référence. Cette hypothèse signifie, qu'en n'importe quel point du réseau et en l'absence de toute estimation du débit de référence, l'estimation la plus probable de celui-ci est la moyenne des débits de référence "observés". Sa variance V^2 est la variance totale de ce débit de référence sur l'échantillon "observé".

Soient W , les observations : $W \sim N(m, V^2)$;

La densité de probabilité de W est présentée dans l'**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

Équation 1

$$\left\{ \begin{array}{l} [W] = \frac{1}{V \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{W - m}{V} \right)^2 \right\} \\ \text{Log} [W] = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{W - m}{V} \right)^2 + \log \left(\frac{1}{V \cdot \sqrt{2\pi}} \right) \end{array} \right.$$

Les distributions des débits d'étiage et des débits moyens sont représentées Figure 15.

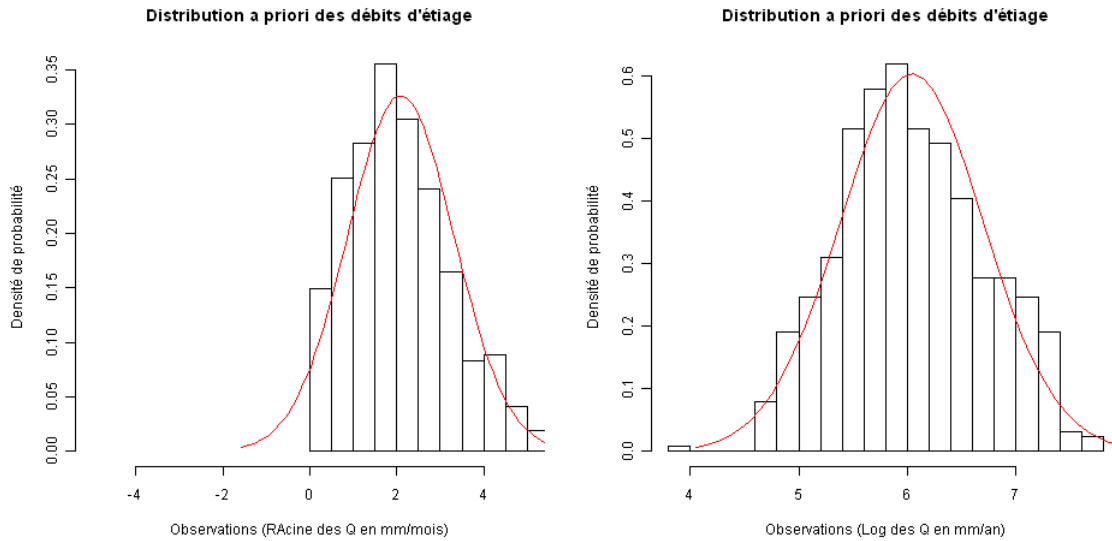


Figure 15 : Distributions à priori des deux variables d'intérêt

- **Application du théorème de Bayes ;**

Dans cette étape, on exprime la fonction de probabilité de notre variable d'intérêt (W , les observations) en fonction d'une variable explicative ($Y1$, les estimations de l'un des modèles de prédétermination) : on veut exprimer nos observations W conditionnellement à la connaissance que l'on a d' $Y1$.

On veut donc : $[W | Y1] \sim N(m', V'^2)$ (propriété de conjugaison de la loi normale découlant de l'hypothèse 1).

Le théorème de Bayes nous dit que :

Équation 2

$$\left\{ \begin{array}{l} [W|Y1] = \frac{[Y1|W] * [W]}{[Y1]} \\ \text{Log}[W|Y1] = \text{Log}[Y1|W] + \text{Log}[W] - \text{Log}[Y1] \end{array} \right.$$

Selon l'hypothèse 2, les relations entre la variable d'intérêt et la variable explicative sont linéaires, d'où :

$$Y1 = a_1 \cdot W + b_1 + \varepsilon \quad ; \quad \text{avec} : \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \text{ erreur du modèle linéaire.}$$

$$\text{et } Y1|W \sim N(a_1 \cdot W + b_1, \sigma_1^2)$$

Le log de la densité de probabilité de $Y1|W$ est présenté dans l'Équation 3.

Équation 3

$$\text{Log}[Y1|W] = -\frac{1}{2} \left(\frac{Y1 - (a_1 \cdot W + b_1)}{\sigma_1} \right)^2 + \text{Log} \left(\frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}} \right)$$

Pour vérifier que nos hypothèses sont correctes, on vérifie que la distribution de l'erreur de notre première régression peut être prise normale (cf. Figure 16 et Figure 17).

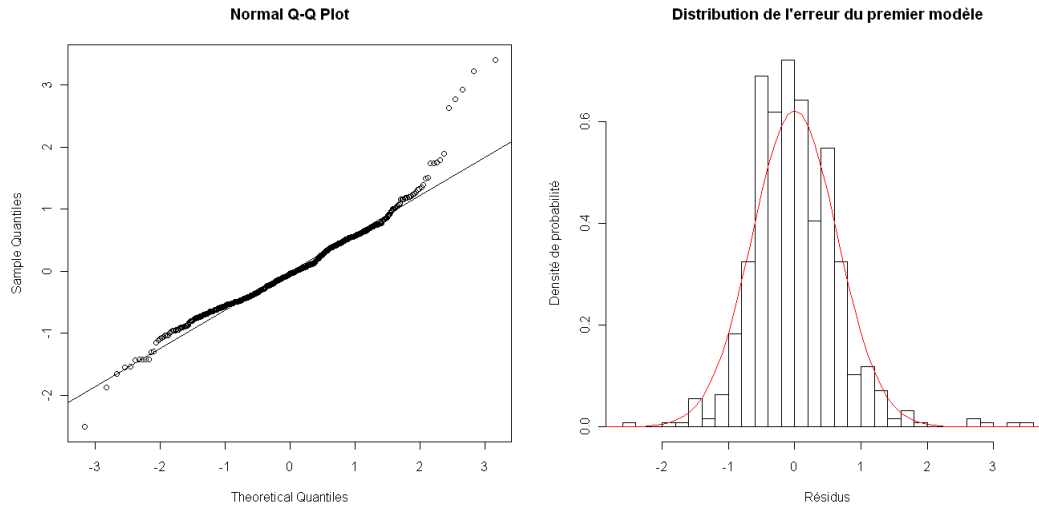


Figure 16 : Distribution de l'erreur du premier modèle - QMNA5

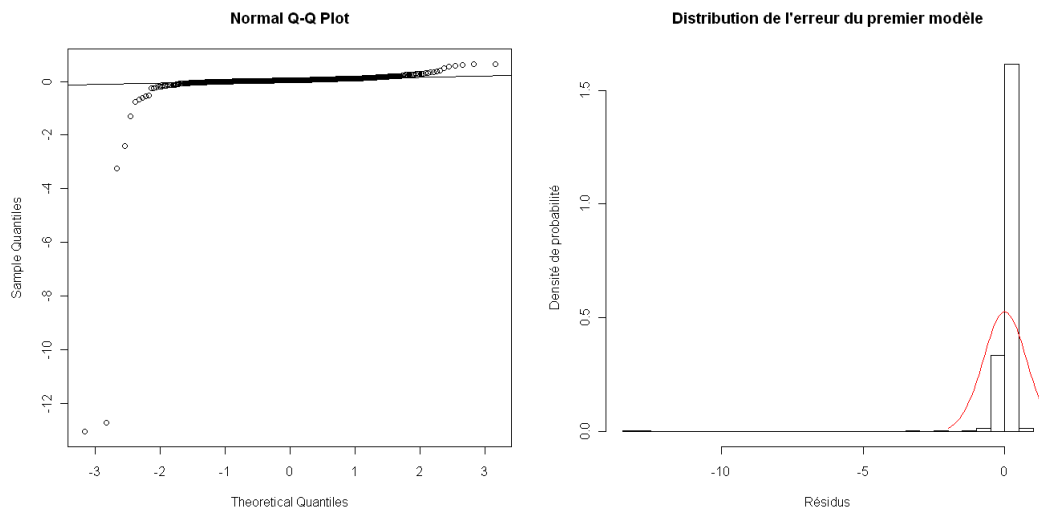


Figure 17 : Distribution de l'erreur du premier modèle – QA

On connaît ainsi tous les termes de l'Équation 2 ($\text{Log}[Y1]$ ne s'exprime pas en fonction de W et est considéré comme une constante) :

Équation 4

$$\text{Log}[W|Y1] = -\frac{1}{2} \left(\frac{Y1 - (a_1 \cdot W + b_1)}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{W - m}{V} \right)^2 + \text{Cste}$$

avec $\text{Cste} = \log\left(\frac{1}{V \cdot \sqrt{2\pi}}\right) + \text{Log}\left(\frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2\pi}}\right)$

- Mise à jour de la distribution par le calcul des nouveaux paramètres de la loi de distribution de la variable d'intérêt ;

On cherche : $[W | Y1] \sim N(m', V'^2)$

Après développement de l'Équation 4 et identification des termes en W^2 et W (par rapport à l'Équation 3), on obtient :

Équation 5

$$\frac{1}{V'^2} = \frac{a_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{1}{V^2}$$

et

Equation 6

$$\frac{m'}{V'^2} = \frac{\left(\frac{Y1 - b_1}{a_1} \right)}{\left(\frac{\sigma_1^2}{a_1^2} \right)} + \frac{m}{V^2}$$

On peut donc calculer moyenne et variance de la nouvelle distribution de la variable d'intérêt. La Figure 18 présente les erreurs du nouveau modèle par rapport aux observations. En noir sont représentées les erreurs absolues du modèle *a priori*, en rouge, les erreurs absolues du modèle *a posteriori*.

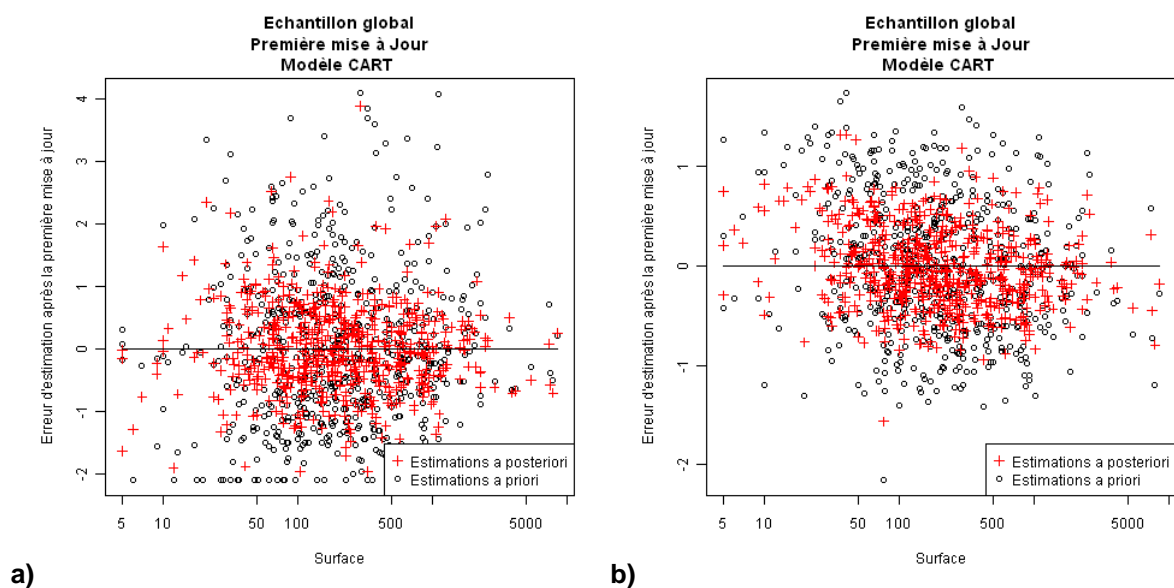


Figure 18 : Résultats des premières mises à jour – a) QMNA5 et b) QA

Ces trois étapes sont répétées autant de fois que l'on a de variables explicatives disponibles. Dans notre cas, nous disposons pour le débit d'étiage et le module, de trois modèles de prédétermination ayant fourni des estimations.

A chaque nouvelle prise en compte de variable explicative, la distribution *a posteriori* précédente devient la distribution *a priori* suivante.

Nous présentons ci-après, les équations finales permettant d'accéder aux paramètres des nouvelles distributions, après chaque mise à jour.

- **Deuxième mise à jour : on cherche $[W | Y1, Y2] \sim N(m'', V''^2)$ (nouvelle distribution a posteriori)**

- **Théorème de Bayes :**

$$[W | Y1, Y2] = \frac{[Y2 | W, Y1] * [W | Y1] * [Y1]}{[Y2, Y1]} \text{ et}$$

$$\text{Log}[W | Y1, Y2] = \text{Log}[Y2 | W, Y1] + \text{Log}[W | Y1] + \text{Log}[Y1] - \text{Log}[Y2, Y1]$$

- **Relation entre les observations (désormais W et Y1 avec $[W | Y1]$ nouvelle distribution a priori) et les estimations du second modèle Y2 :**

$$Y2 = a_2 \cdot W + b_2 + c_2 \cdot Y1 + \varepsilon \quad ; \quad \text{avec : } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \text{ erreur du modèle linéaire.}$$

$$\text{et } Y2 | W, Y1 \sim N(a_2 \cdot W + b_2 + c_2 \cdot Y1, \sigma_2^2)$$

Le log de la densité de probabilité de $Y2 | W, Y1$ est présenté dans l'Équation 3.

Équation 7

$$\text{Log}[Y2 | W, Y1] = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Y2 - a_2 \cdot W + b_2 + c_2 \cdot Y1}{\sigma_2} \right)^2 + \log \left(\frac{1}{\sigma_2 \cdot \sqrt{2\pi}} \right)$$

Pour vérifier que nos hypothèses sont correctes, on vérifie que la distribution de l'erreur de notre deuxième régression peut être prise normale (cf. Figure 19 et Figure 20).

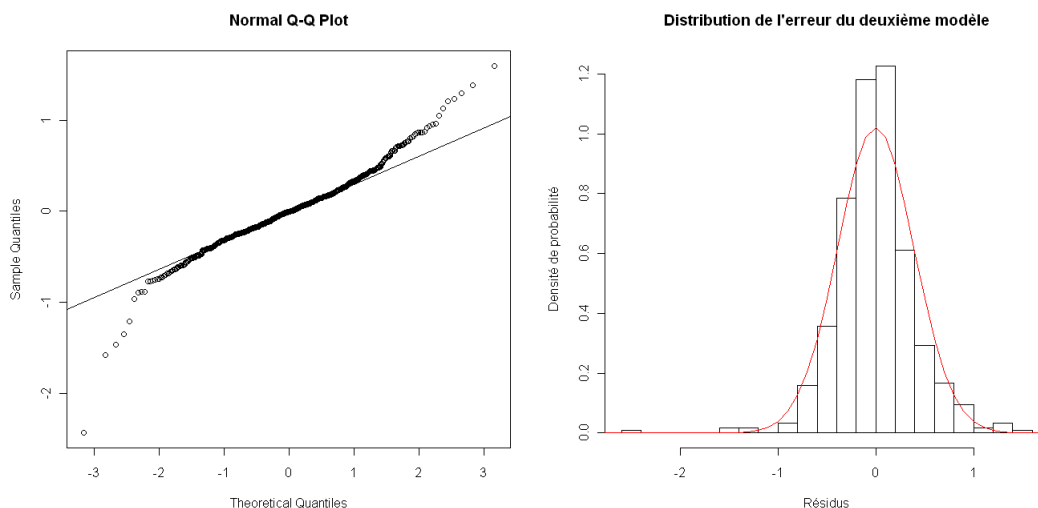


Figure 19 : Distribution de l'erreur du deuxième modèle - QMNA5

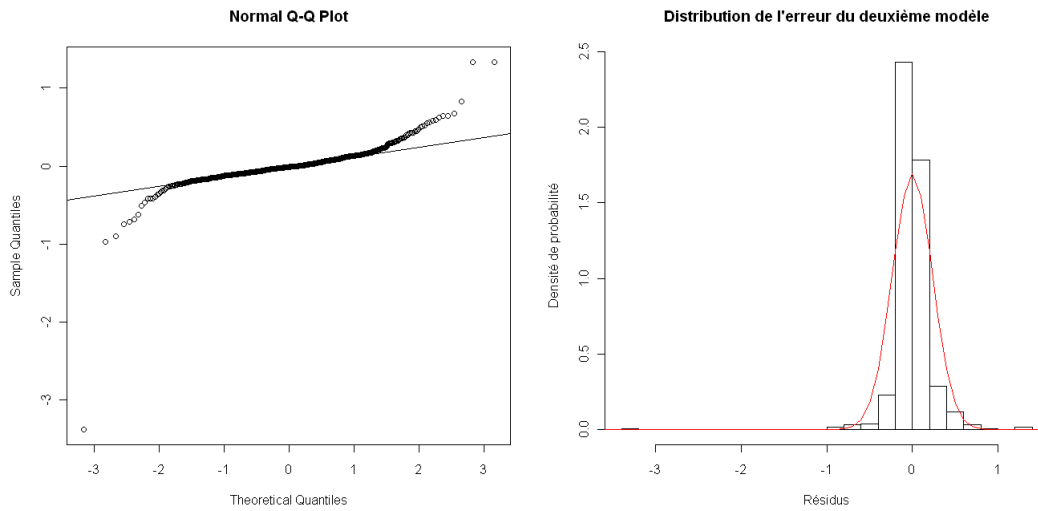


Figure 20 : Distribution de l'erreur du deuxième modèle – QA

- On connaît $\log [Y2|W,Y1]$, $\log [W|Y1]$ et $\log [Y1]$ et $\log[Y1,Y2]$ sont indépendants de W , d'où :

$$\text{Log}[W|Y1,Y2] = -\frac{1}{2} \left(\frac{Y2 - (a_2 \cdot W + b_2 + c_2 Y1)}{\sigma_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{W - m'}{V'} \right)^2 + \text{Cste}$$

Après développement de l'Équation 7 et par identification des termes en W et W^2 on obtient :

Équation 8

$$\frac{1}{V''^2} = \frac{a_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{1}{V'^2}$$

et

Équation 9

$$\frac{m''}{V''^2} = \frac{\left(\frac{Y2 - c_2 \cdot Y1 - b_2}{a_2} \right)}{\left(\frac{\sigma_2^2}{a_2^2} \right)} + \frac{m'}{V'^2}$$

On peut donc calculer moyenne et variance de la nouvelle distribution de la variable d'intérêt. La Figure 21 présente les erreurs du nouveau modèle par rapport aux observations. En noir sont représentées les erreurs absolues du modèle *a priori*, en rouge, les erreurs absolues du modèle *a posteriori*.

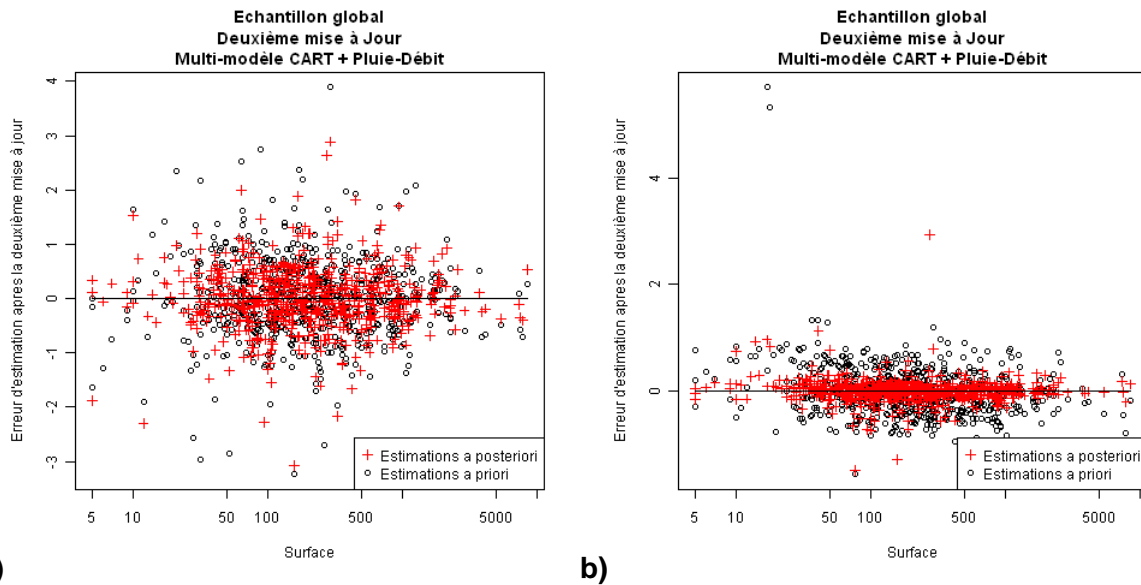


Figure 21 : Résultats des deuxièmes mises à jour – a) QMNA5 et b) QA

- **Troisième mise à jour : on cherche $[W | Y1, Y2, Y3] \sim N(m''', V'''^2)$;**
 - **Théorème de Bayes :**

$$[W | Y1, Y2, Y3] = \frac{[Y3 | W, Y1, Y2] * [W | Y1, Y2] * [Y1, Y2]}{[Y3, Y1, Y2]} \text{ et}$$

$$\text{Log}[W | Y1, Y2, Y3] = \text{Log}[Y3 | W, Y1, Y2] + \text{Log}[W | Y1, Y2] + \text{Log}[Y1, Y2] - \text{Log}[Y3, Y2, Y1]$$

- **Relation entre les observations (désormais $W, Y1$ et $Y2$ avec $[W | Y1, Y2]$ nouvelle distribution *a priori*) et les estimations du troisième modèle $Y3$:**
 $Y3 = a_3 \cdot W + b_3 + d_3 \cdot Y1 + e_3 \cdot Y2 + \varepsilon$; avec : $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, erreur du modèle linéaire.
 et $Y3 | W, Y1, Y2 \sim N(a_3 \cdot W + b_3 + d_3 \cdot Y1 + e_3 \cdot Y2, \sigma_3^2)$

Le log de la densité de probabilité de $Y3 | W, Y1, Y2$ est présenté dans l'Équation 10.

Équation 10

$$\text{Log}[Y2 | W, Y1, Y2] = -\frac{1}{2} \left(\frac{Y3 - a_3 \cdot W + b_3 + d_3 \cdot Y1 + e_3 \cdot Y2}{\sigma_3} \right)^2 + \log \left(\frac{1}{\sigma_3 \cdot \sqrt{2\pi}} \right)$$

Pour vérifier que nos hypothèses sont correctes, on vérifie que la distribution de l'erreur de notre deuxième régression peut être prise normale (cf. Figure 22 et Figure 23).

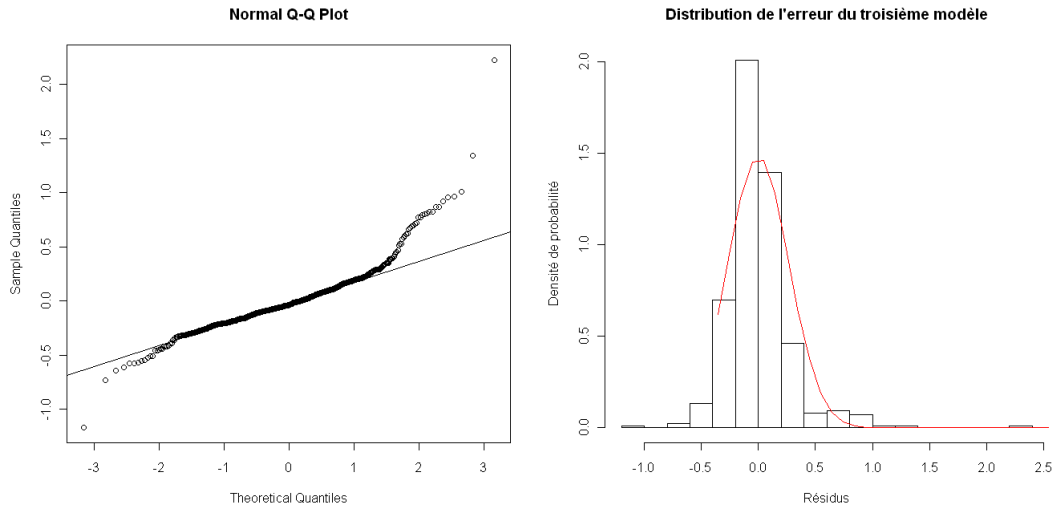


Figure 22 : Distribution de l'erreur du troisième modèle - Q_{mna5}

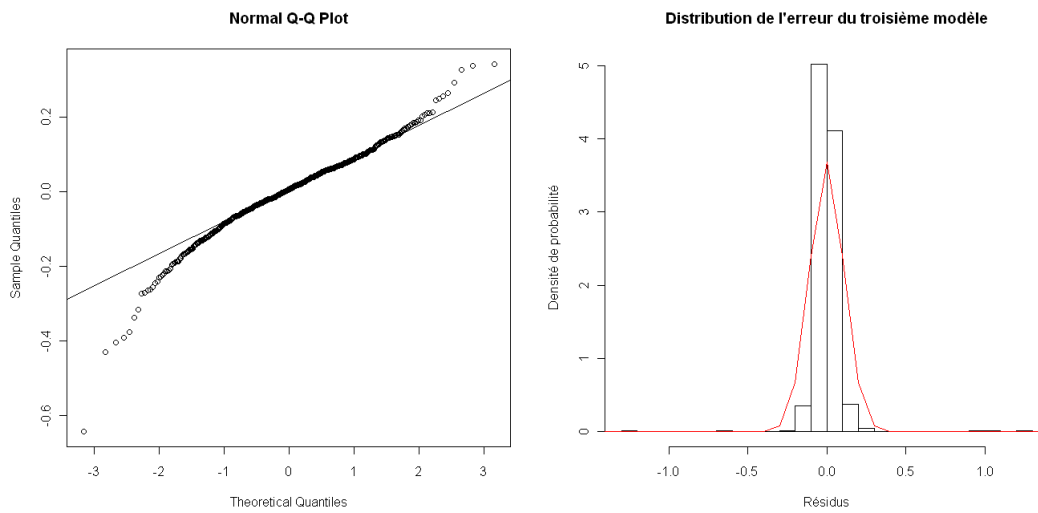


Figure 23 : Distribution de l'erreur du troisième modèle - Q_a

Après développement de l'Équation 10 et identification des termes en W^2 et W , on obtient :

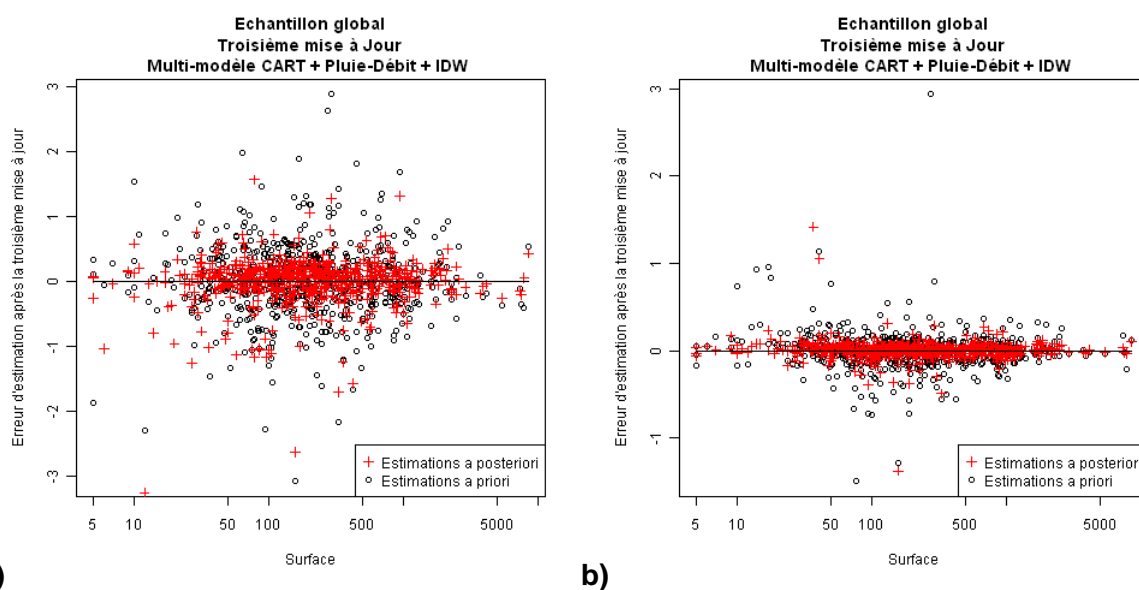
Équation 11

$$\frac{1}{V'''^2} = \frac{a_3^2}{\sigma_3^2} + \frac{1}{V''^2}$$

et

Équation 12

$$\frac{m'''}{V'''^2} = \frac{\left(\frac{Y3 - d_3.Y1 - e_3.Y2 - b_3}{a_3} \right)}{\left(\frac{\sigma_3^2}{a_3^2} \right)} + \frac{m''}{V''^2}$$



a) b)
Figure 24 : Résultats de la troisième mise à jour – a) Qmna5 et b) Q_a

3.1.3 EFFICACITE DE LA PRISE EN COMPTE DE CHAQUE MODELE

A chaque nouvelle mise à jour, une nouvelle distribution est proposée pour la variable d'intérêt. Les paramètres de cette nouvelle distribution sont donc actualisés, et l'écart type est réduit au fur et à mesure que la distribution de la variable est affinée.

Le Tableau 7 présente les écarts types des distributions au fur et à mesure qu'elles sont mises à jour, pour les deux variables d'intérêt.

Tableau 7

Erreur d'estimation	Multi-modèle de QMNA5	Multi-modèle de QA
<i>Prior initial</i>	1.22	0.66
<i>Première mise à jour</i>	0.75	0.51
<i>Deuxième mise à jour</i>	0.58	0.23
<i>Troisième mise à jour</i>	0.36	0.13

On a bien une réduction de l'erreur d'estimation au fur et à mesure de la prise en compte des trois variables explicatives.

3.2 Résultats du multi-modèle sur l'échantillon de référence stratifié

Nous ne présentons pas ici les détails des calculs et des différentes étapes. Nous présentons uniquement les résultats en termes de coefficients de détermination r^2 du multi-modèle sur l'échantillon de référence. L'objectif est de montrer que le multi-modèle permet dans toutes les catégories de surface, d'améliorer ou au moins de maintenir les estimations qui sont proposées par le meilleur modèle de chaque classe.

3.2.1 MULTI-MODELE DE QMNA5

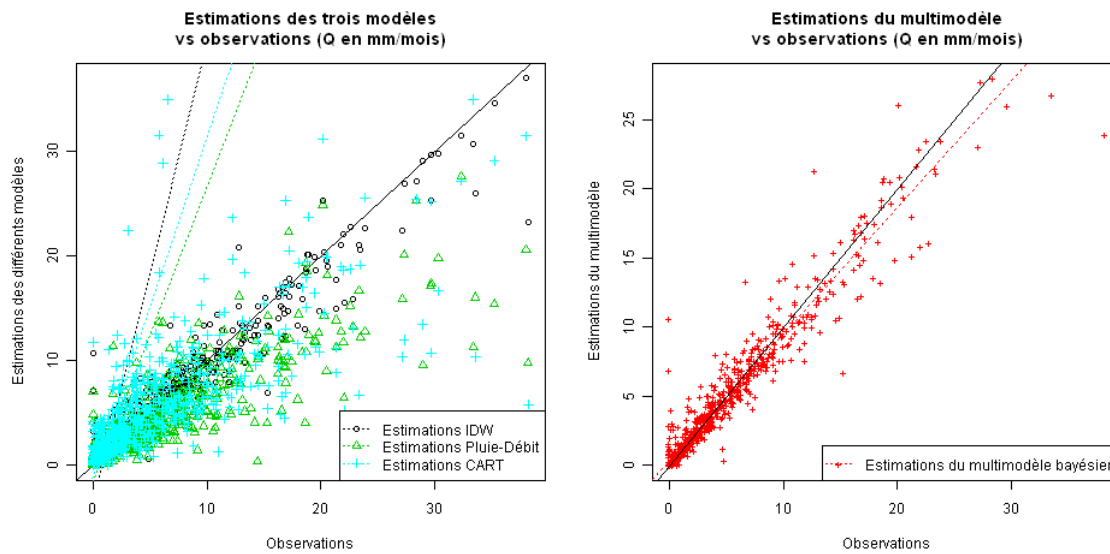


Figure 25 : Résultats du multi-modèle sur le QMNA5

Tableau 8 : Résultats du multi-modèle sur le QMNA5 – Valeurs des coefficients de détermination R²

	Racine Q	Q
Antony	0.91	0.94
Aix	0.76	0.72
Lyon	0.62	0.53
Multi-Modèle	0.91	0.94

3.2.2 MULTI-MODELE DE MODULE

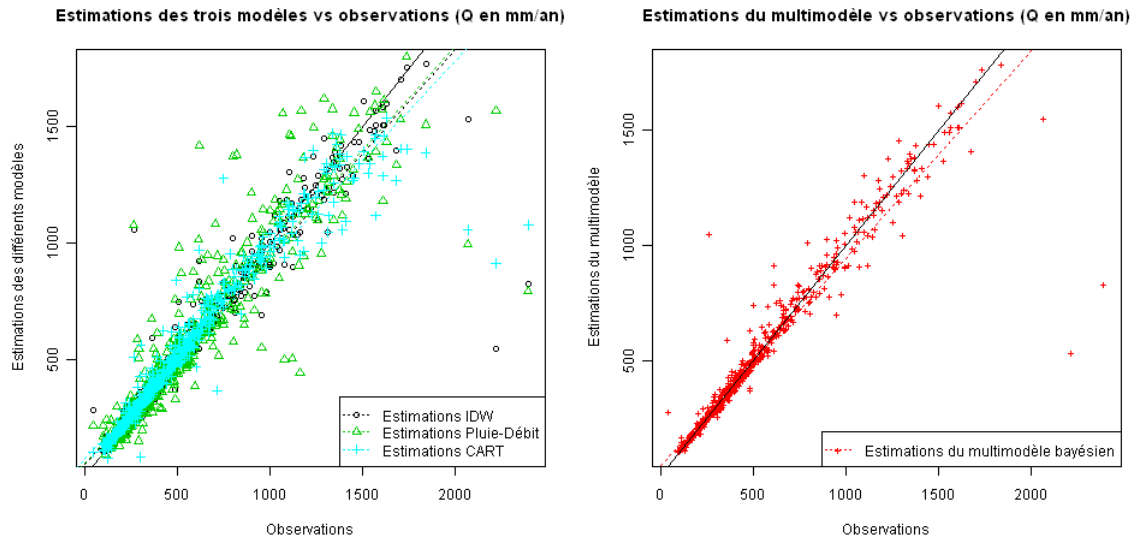


Figure 26 : Résultats du multi-modèle sur le Module

Tableau 9 : Résultats du multi-modèle sur le Module – Valeurs des coefficients de détermination R²

	Log des Q	Q
Antony	0.958	0.912
Aix	0.872	0.851
Lyon	0.405	0.907
Multi-Modèle	0.958	0.913

3.2.3 QUANTIFICATION DE L'INCERTITUDE

Les distributions a posteriori de nos variables cibles étant des distributions normales, elles sont caractérisées par une moyenne et une variance (écart type au carré). C'est cette variance qui nous donne accès à l'incertitude sur notre estimation finale.

Ainsi nous avons un écart type associé à l'estimation et nous pouvons encadrer nos valeurs dans un intervalle à 80% par exemple (intervalle défini pour l'étude) :

$$Q_{référence} = m \text{ (moyenne de l'estimation)} \pm 1.28.\sigma$$

Ces valeurs sont applicables à des débits transformés par le log ou la racine et exprimés en mm. Si la loi qui caractérise la distribution de telles variables est une loi normale et permet donc d'avoir des intervalles d'erreur symétriques, lorsque l'on va repasser en débits non transformés ces intervalles ne seront plus symétriques.

3.2.4 ROBUSTESSE DE L'ESTIMATION CONSENSUELLE

En complément à l'intervalle de confiance fourni pour chaque estimation et qui prend en compte les erreurs d'estimation intrinsèques à la méthode de combinaison multi-modèle, une note de robustesse est affectée également à chaque estimation consensuelle. Cette note reflète la convergence des estimations initiales (i.e des estimations issues des modèles Pluie-débit, CART et IDW) et pointe une certaine confiance des modélisateurs quant aux valeurs fournies initialement.

Cette note est comprise entre 1 et 3 :

- ❖ 1 signifie que l'estimation consensuelle paraît "fragile";
- ❖ 2 signifie que l'estimation finale doit être prise avec "prudence";
- ❖ 3 signifie que l'estimation consensuelle est considérée "robuste".

Lorsqu'une seule estimation a été fournie sur un tronçon avant la mise en œuvre de la combinaison, la note de robustesse est notée 4.

Les tronçons sur lesquels aucune estimation n'est disponible apparaissent en -9999.

4. Cartographies de consensus

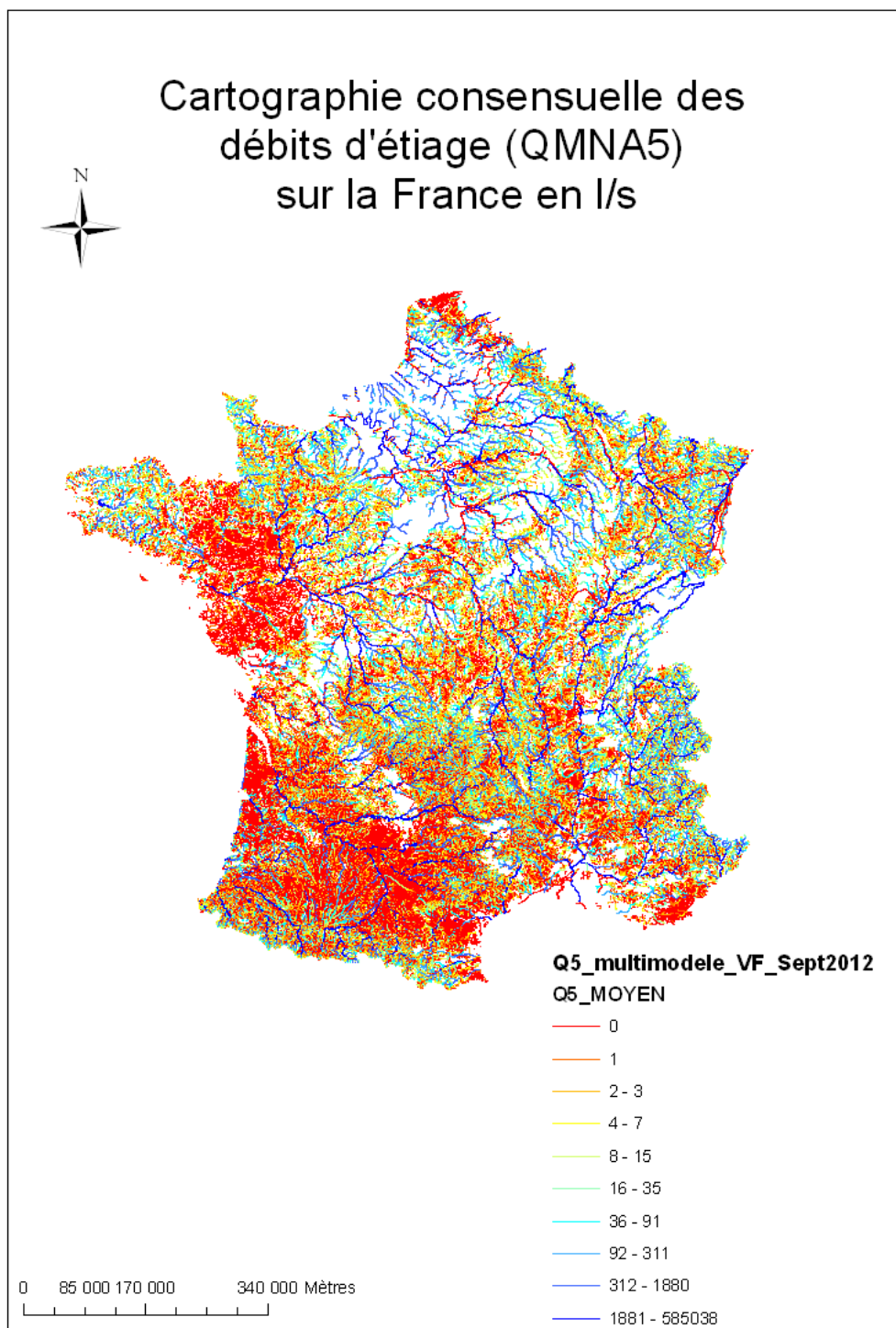
Dans un souci de rendre la carte cohérente et bien qu'elle ait pour but de proposer des débits de type fréquentiels, il nous a paru important que ceux-ci soient continus le long du réseau hydrographique.

Le problème inhérent au multi-modèle est qu'une combinaison d'estimations n'est pas continue (et ceci quand bien même chaque cartographie initiale issue des différentes méthodes de prédétermination serait continue, ce qui n'est pas le cas ici).

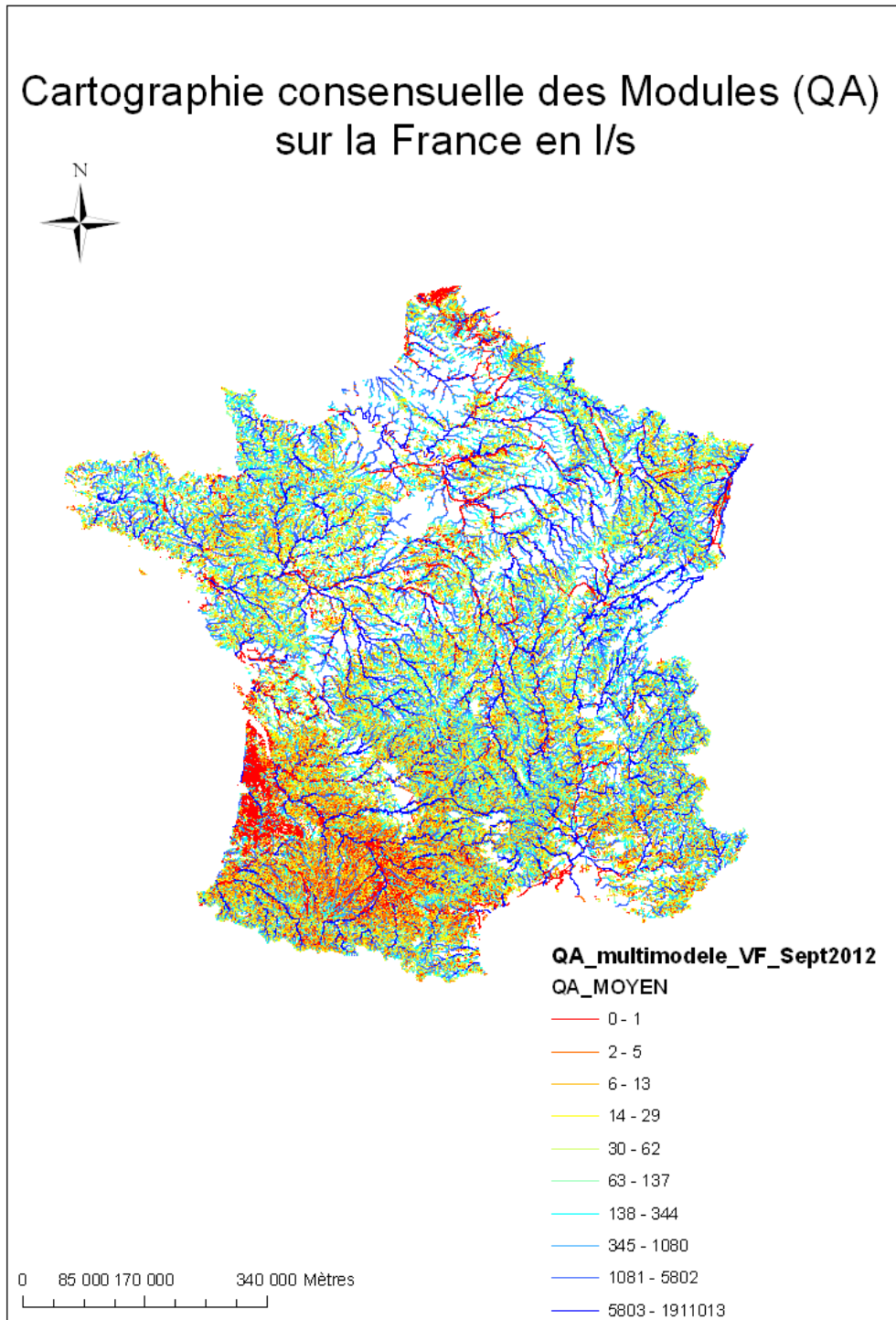
Nous avons choisi d'utiliser pour répondre à cette nécessité de continuité des débits pour les utilisateurs, l'estimation proposée par la méthode IDW comme valeur centrale (les autres cartographies sont discontinues à l'heure actuelle). Le multi-modèle est utilisé in-fine pour calculer l'intervalle de confiance autour de la valeur centrale.

Ainsi, la stratification en classes de surface est utilisée afin de réduire l'incertitude autour de la valeur moyenne proposée, et les estimations des trois méthodes sont également prises en compte au niveau des valeurs qui bornent l'intervalle de confiance à 80%.

4.1 Les QMNA5 en l/s



4.2 Les QA en l/s



Onema
Hall C – Le Nadar
5 square Félix Nadar
94300 Vincennes
01 45 14 36 00
www.onema.fr

Irstea
1, rue Pierre-Gilles de Gennes
CS 10030
92761 Antony Cedex
01 40 96 61 21
www.Irstea.fr